SÉRIE D'EXERCICES N^o 6B

Ce document comporte 3 pages.

EFFETS THERMOÉLECTRIQUES

Dans certaines circonstances expérimentales, le passage d'un courant électrique (c'est-à-dire un flux de charges) peut donner lieu à un flux thermique (sans rapport avec l'effet Joule). Inversement, l'établissement d'un gradient de température peut provoquer l'apparition d'un courant électrique ou d'une différence de potentiel : c'est ce qu'on appelle les effets thermoélectriques. Une application importante d'un de ces effets, l'effet Peltier, est la réfrigération de circuits électroniques ou optoélectroniques.

A : Forces thermodynamiques

A-1 : Cas de la conduction thermique pure

Soit un barreau cylindrique homogène et isotrope, d'axe (Ox), de section Σ, parcouru par un flux thermique parallèlement à son axe. On donne la conductivité thermique λ du milieu supposée constante. On se place en régime stationnaire, on suppose le problème unidimensionnel ; on note $T(x)$ la température en un point d'abscisse x.

Soit $\vec{j}_q = j_q(x)\vec{e}_x$ le vecteur densité de courant thermique au sein du milieu.
☐ **1.** Comment faire *expérimentalement* pour que le problème soit bien unidimensionnel ? Montrer que j_q est uniforme dans le barreau.
☐ **2.** Montrer que l'entropie échangée par la tranche comprise entre les sections d'abscisses x et $x+\mathrm{d}x$ avec l'extérieur entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ vaut $\delta S_e = \left[\frac{j_q}{T(x)} - \frac{j_q}{T(x+\mathrm{d}x)}\right]\Sigma \mathrm{d}t$.
☐ **3.** En déduire que l'entropie créée par unité de temps et de volume de matériau s'écrit $\sigma = j_q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{T}\right)$ soit aussi $\sigma = \vec{j}_q \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{1}{T}\right)$. Quelle est la dimension de σ ? Quel en est le sens physique ? Que peut-on dire du signe de σ ?

L'entropie créée par unité de temps et de volume s'écrit donc $\sigma = \vec{j}_q \cdot \vec{f}_q$ avec $\vec{f}_q = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{1}{T}\right)$. $\vec{f}_q$ est la « force thermodynamique » de conduction thermique.
☐ **4.** Le barreau, de longueur $L = 10$ cm, est cuivre, de conductivité thermique $\lambda = 400\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Ses deux extrémités sont maintenues aux températures $T(x=0) = 293$ K et $T(x=L) = 273$ K. Calculer numériquement σ au milieu du barreau.

A-2 : Cas de la conduction électrique pure.

Le même barreau est maintenant parcouru par un courant électrique de vecteur densité de courant $\vec{j}_e = j_e\vec{e}_x$ supposé uniforme sur une section droite du barreau (comme précédemment, on suppose le problème unidimensionnel). On donne la conductivité électrique γ du milieu supposée uniforme. En régime stationnaire, on note $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$ le champ électrique dans le conducteur et $V(x)$ le potentiel électrostatique. La température T est supposée uniforme au sein du barreau.
☐ **5.** Montrer que j_e est uniforme dans tout le conducteur.
☐ **6.** Calculer la puissance cédée par le champ $\vec{E}$ à la tranche de conducteur comprise entre les sections d'abscisses x et $x+\mathrm{d}x$. En déduire l'expression de σ, entropie créée par unité de temps et de volume.
☐ **7.** Mettre σ sous la forme $\sigma = \vec{j}_e \cdot \vec{f}_e$ où $\vec{f}_e = -\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}V}{T}$ est la force thermodynamique de conduction électrique.
☐ **8.** Le barreau conducteur est parcouru par un courant de 100 mA ; sa section vaut $\Sigma = 1\ \mathrm{mm}^2$. Il est constitué de cuivre de conductivité électrique $\gamma = 5{,}9 \times 10^7\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$. La température du barreau vaut $T = 293$ K. Calculer numériquement σ.

Lorsque le milieu est simultanément le siège de phénomènes de conduction électrique et de conduction thermique, on admet que l'entropie créée par unité de temps et de volume de matériau s'écrit (on parle alors de couplage thermoélectrique) $\sigma = \vec{j}_q \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) + \vec{j}_e \cdot \frac{-\overrightarrow{\mathrm{grad}}V}{T}$. Il est à noter que ce résultat est absolument non trivial, contrairement à ce que l'on pourrait penser.

B : Théorie de la réponse linéaire d'Onsager

B-1 : Coefficients d'Onsager

À l'équilibre thermodynamique, les vecteurs densités de courant $\vec{j}_q$ et $\vec{j}_e$ sont nuls ; la température T et le potentiel V sont uniformes et constants dans le temps ; les forces thermodynamiques $\vec{f}_q = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right)$ et $\vec{f}_e = \frac{-\overrightarrow{\text{grad}}V}{T}$ sont donc nulles à l'équilibre. Pour qu'il y ait transport de chaleur ou de charges, il faut donc être hors-équilibre : les forces thermodynamiques $\vec{f}_q$ et $\vec{f}_e$ ne sont alors plus nulles. Près de l'équilibre, les densités de courant $\vec{j}_q$ et $\vec{j}_e$ dépendent linéairement des forces thermodynamiques $\vec{f}_q$ et $\vec{f}_e$ selon les relations phénoménologiques $\vec{j}_q = L_{qq}\vec{f}_q + L_{qe}\vec{f}_e$ et $\vec{j}_e = L_{eq}\vec{f}_q + L_{ee}\vec{f}_e$, avec la relation dite d'Onsager $L_{eq} = L_{qe}$. Les coefficients L_{qq}, L_{ee} et L_{qe} sont des coefficients phénoménologiques. Ceci constitue la théorie de la réponse linéaire mise au point par le physicien norvégien LARS ONSAGER en 1931, Prix Nobel de Chimie en 1968.

On se propose dans cette partie de calculer les coefficients d'Onsager en fonction des données expérimentales dont on dispose sur le milieu étudié : sa conductivité thermique λ, sa conductivité électrique γ et son pouvoir thermoélectrique ε défini par la relation $\overrightarrow{\text{grad}}V = -\varepsilon\overrightarrow{\text{grad}}T$ à courant électrique nul (c'est-à-dire pour $\vec{j}_e = \vec{0}$).

☐ **9.** Citer et énoncer au moins une loi phénoménologique linéaire figurant à votre programme.

☐ **10.** En vous plaçant dans le cas d'un champ de température uniforme, exprimer L_{ee} en fonction de γ et T.

☐ **11.** En vous plaçant à courant électrique nul, donner une relation entre ε, L_{qe}, L_{ee}, T d'une part, et une relation liant ε, λ, L_{qq}, L_{ee} et T, d'autre part.

☐ **12.** En déduire l'expression de $\vec{j}_q$ et $\vec{j}_e$ en fonction de λ, ε, γ, T, $\overrightarrow{\text{grad}}T$ et $\overrightarrow{\text{grad}}V$. En déduire finalement la relation, notée (E), $\vec{j}_q = -\lambda\overrightarrow{\text{grad}}T + \varepsilon T\vec{j}_e$.
Commenter. On supposera cette relation valable dans toute la suite.

B-2 : Effet Peltier

On considère un « module à effet Peltier » constitué comme sur la fig. 1 ; deux barreaux cylindriques semi-conducteurs *n* et *p* sont reliés d'une part à une source froide de température T_f par l'intermédiaire d'une plaque métallique F (dont la température vaut T_f), et d'autre part à une source chaude de température T_c, par l'intermédiaire de deux conducteurs dénommés C_1 et C_2 ; les jonctions $n-F$ et $p-F$ sont à la température T_f ; les jonctions C_1-n et C_2-p sont toutes deux à la température T_c. Les parois latérales des deux barreaux semi-conducteurs sont supposées adiabatiques.

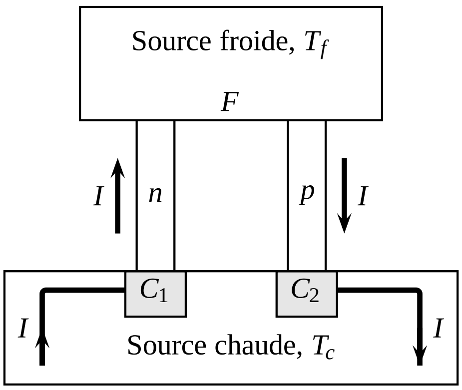

FIG. 1 – Module à effet Peltier

On suppose le problème unidimensionnel au sein de chaque barreau. L'ensemble est parcouru par un courant électrique I permanent délivré par un générateur. On note ε_n et ε_p les pouvoirs thermoélectriques des matériaux semi-conducteurs *n* et *p*.

☐ **13.** On ne s'intéresse pour le moment qu'au terme $\varepsilon T\vec{j}_e$ de l'équation (E) établie à la question 12. Montrer que la puissance algébriquement reçue par la source froide par l'intermédiaire des deux jonctions $n-F$ et $F-p$ s'écrit $\mathscr{P}_P^F = (\varepsilon_n - \varepsilon_p)T_f I$. Le passage du courant I du semi-conducteur n au semi-conducteur p, les deux jonctions $n-F$ et $F-p$ étant à la même température T_f, provoque donc un transfert thermique : c'est l'effet Peltier. On appellera $\mathscr{P}_P^F$ « puissance thermique Peltier » algébriquement fournie à la source froide.

☐ **14.** On suppose $\varepsilon_n - \varepsilon_p < 0$. Quel est le rôle de l'élément à effet Peltier précédemment étudié ? Que se passe-t-il si l'on inverse le sens du courant ? Quel cas vous semble le plus intéressant sur le plan pratique ?

C : Étude d'un réfrigérateur à effet Peltier

On souhaite réaliser, à l'aide du module à effet Peltier décrit ci-dessus, un réfrigérateur. On suppose négligeable la résistance électrique de la plaque F. Les hypothèses de stationnarité et de géométrie unidimensionnelle sont conservées. On néglige, pour le moment, l'effet Joule (conductivité électrique grande) ainsi que les pertes par conduction thermique dans les semi-conducteurs n et p (conductivité thermique faible) ; cela implique notamment la relation $\vec{j}_q = \varepsilon T \vec{j}_e$ au sein de chaque semi-conducteur, au voisinage des jonctions.

☐ **15.** Calculer la puissance thermique Peltier $\mathscr{P}_P^C$ fournie à la source chaude. En déduire la puissance électrique $\mathscr{P}_e$ fournie par le générateur au module à effet Peltier en fonction de ε_n, ε_p, T_f, T_c et I.

☐ **16.** On donne les valeurs numériques $\varepsilon_p = 200\ \mu\mathrm{V}\cdot\mathrm{K}^{-1}$, $\varepsilon_n = -190\ \mu\mathrm{V}\cdot\mathrm{K}^{-1}$, $T_f = 273$ K, $T_c = 293$ K et $I = 5$ A. Calculer numériquement $\mathscr{P}_P^F$ et $\mathscr{P}_e$.

☐ **17.** Montrer que le module à effet Peltier se comporte comme un générateur de tension continue dont on précisera la force électromotrice U ainsi que la résistance interne r ; représenter son schéma électrique équivalent. Calculer numériquement U.

☐ **18.** Définir et évaluer l'efficacité e de ce réfrigérateur. Comparer e à l'efficacité d'un réfrigérateur fonctionnant suivant un cycle de Carnot entre les températures T_f et T_c. Comment pouvez-vous qualifier le fonctionnement du module dans le cadre du modèle proposé ?

On tient maintenant compte de l'effet Joule et de la conduction thermique dans les deux barreaux semi-conducteurs. On note λ_n et λ_p les conductivités thermiques (supposées indépendantes de la température) des semiconducteurs n et p ; γ_n et γ_p leurs conductivités électriques (également indépendantes de la température) ; Σ leur section, et L leur longueur. On suppose momentanément que les pouvoirs thermoélectriques ε_n et ε_p dépendent de la température.

☐ **19.** On considère ici le barreau semi-conducteur de type n. Son axe est l'axe (Ox) ; la jonction $C_1 - n$ a pour abscisse $x = 0$ et la jonction $n - F$ a pour abscisse $x = L$. En effectuant un bilan d'énergie sur la tranche comprise entre les sections d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, montrer, en utilisant notamment l'équation (E), que la température au sein dudit barreau vérifie l'équation différentielle $\lambda_n \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{I}{\Sigma}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_n}{\mathrm{d}T} T(x) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{I^2}{\gamma_n \Sigma^2}$.

☐ **20.** Dans le domaine des températures envisagées, on peut considérer que ε_n est indépendant de la température T. Déterminer le champ de température $T(x)$ dans le barreau semi-conducteur de type n. En déduire que la puissance thermique autre que la puissance Peltier fournie à la source froide par l'intermédiaire de la jonction $n - F$ s'écrit $\mathscr{P}_n^F = \frac{\lambda_n \Sigma}{L}(T_c - T_f) + \frac{1}{2}\frac{L}{\gamma_n \Sigma} I^2$.

☐ **21.** Identifier chacun des termes de l'expression trouvée et en donner le sens physique.

☐ **22.** On suppose également le pouvoir thermoélectrique ε_p indépendant de la température T. Déduire de ce qui précède la puissance totale $\mathscr{P}^F$ fournie à la source froide (puissance Peltier comprise). On posera $R = \frac{L}{\Sigma}\left(\frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_p}\right)$ et $G = \frac{\Sigma}{L}(\lambda_n + \lambda_p)$.

☐ **23.** Que représentent les grandeurs R et G ? Commenter les expressions de R et G.

☐ **24.** On donne les valeurs numériques $\gamma_n = 7,1 \times 10^4\ \mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$; $\gamma_p = 8,3 \times 10^4\ \mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$; $\lambda_n = 1,25\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$; $\lambda_p = 1,15\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$; $L = 5$ mm et $\Sigma = 25\ \mathrm{mm}^2$. Calculer numériquement R et G. Quelles précautions doit-on prendre concernant les jonctions et les soudures des fils d'alimentation ?

☐ **25.** Calculer numériquement $\mathscr{P}^F$ pour $I = 5$ A et $T_c = 293$ K dans les deux cas $T_f = 273$ K et $T_f = 253$ K. Commenter. Au vu des valeurs numériques calculées, discuter la validité des deux approximations faites aux questions 15 à 18.

☐ **26.** Déterminer la température minimale $T_{f,\min}$ que permet d'atteindre le réfrigérateur, en fonction du courant I et de la température T_c. Application numérique pour $I = 5$ A et $T_c = 293$ K.

☐ **27.** Donner l'expression de la puissance totale $\mathscr{P}^C$ fournie à la source chaude. En déduire l'expression de la puissance électrique $\mathscr{P}_e$ fournie par le générateur au module à effet Peltier. Calculer numériquement $\mathscr{P}_e$ en prenant $T_c = 293$ K, $T_f = 273$ K et $I = 5$ A.

☐ **28.** Que vaut l'efficacité du réfrigérateur à effet Peltier dans les mêmes conditions expérimentales ? Comparer les résultats à ceux de la question 18. Quelles sont ici les causes d'irréversibilité dans le fonctionnement du réfrigérateur ? Donner le schéma électrique équivalent du module à effet Peltier et préciser les valeurs de sa force électromotrice U et de sa résistance interne r. Comparer ces résultats aux valeurs trouvées en 17.

☐ **29.** On souhaite obtenir une puissance de réfrigération de 50 W pour $T_f = 273$ K, $T_c = 293$ K et $I = 5$ A. Combien de modules faut-il utiliser ? Comment doit-on les assembler ? Comment qualifieriez-vous le montage du point de vue électrique ? du point de vue thermique ?