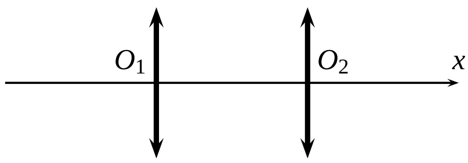
SÉRIE D'EXERCICES N° 16

Ce document comporte 1 page.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

I– Optique géométrique



On réalise un doublet au moyen de deux lentilles (convergentes sur le schéma ci-dessus, mais ce n'est pas une nécessité) de même axe (Ox). Les distances focales image f_1' et f_2' des lentilles seront notées par les variables `f1` et `f2` ; les abscisses de leurs centres optiques seront $x_{O_1} = 0$ et $x_{O_2} = e$, notée par la variable `e`.
La position d'un objet quelconque sur l'axe optique sera repérée par sa coordonnée x, et son image par sa coordonnée x', notées par la variable `x` et la fonction `xx(x)`.
Le grandissement linéaire transversal γ pour un objet d'abscisse x sera noté par la fonction `G(x)`.
☐ **1.** Construire la fonction `xx(x)`.
☐ **2.** Construire la fonction `G(x)`.
On note F et F' les foyers objet et image du système, et x_F et $x_{F'}$ leurs abscisses, qui seront représentées par les variables `xF` et `xFF`.
On note aussi (H,H') le couple de points conjugués de grandissement $\gamma = 1$, x_H et $x_{H'}$ leurs abscisses, qui seront représentées par les variables `xH` et `xHH`.
☐ **3.** Calculer `xF`, `xFF`, `xH` et `xHH`. Exprimer $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$
☐ **4.** Montrer la relation de conjugaison liant $\overline{FA}$ et $\overline{F'A'}$. Définir et calculer la vergence du système.

II– Dynamique du point

On étudie le mouvement borné d'un mobile ponctuel P de masse m dans un champ de forces conservatif dérivant de l'énergie potentielle $E_p(r) = -\frac{Km}{r}$, où $K > 0$ est une constante et r est la distance de P à l'origine des coordonnées. À l'instant origine, la distance r est minimale et vaut r_0 tandis que la vitesse de P vaut $\frac{C}{r_0}$ où $C > 0$.
☐ **1.** Montrer que le problème est conservatif ; on choisit de noter son énergie mécanique $E = -\frac{Km}{2\alpha}$. Quel est le signe de α ?
☐ **2.** On note $\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = f(r)$, représenté par la fonction `f(r)`. Expliciter cette grandeur, en fonction de `K`, `C`, `alpha` et `r`. Quelle est, à votre avis, la nature de la trajectoire ?.
☐ **3.** Exprimer les distances minimale r_0 et maximale r_1 (notées `r0` et `r1`) en fonction de α, C et K. Quelles sont les significations physiques des grandeurs α, $q = \frac{2r_0r_1}{r_0+r_1}$ et $\varepsilon = \frac{r_1-r_0}{r_1+r_0}$? Exprimer q et ε en fonction de α, C et K.
☐ **4.** On s'intéresse à une comète d'excentricité $e = 0,90$ et de période $T = 70$ années. Calculer, en unités astronomiques (UA), la distance minimale de la comète au Soleil. On négligera l'influence des autres astres du système solaire. On rappelle que l'unité astronomique est la distance, supposée constante, de la Terre au Soleil.
☐ **5.** Calculer, dans ce système d'unités, la valeur de K. À quel instant aura-t-on une distance au Soleil $d = 10$ UA ?

I : $x' = \frac{(f_2'f_1'+f_1'e-e^2)x-e^2f_1'}{(f_1'+f_2'-e)x+f_1'(f_2'-e)}$. $\gamma = \frac{f_2'f_1'}{(f_1'+f_2'-e)x+f_1'(f_2'-e)}$. $x_F = \frac{f_1'(e-f_2')}{f_1'+f_2'-e}$; $x_{F'} = \frac{f_1'(e+f_2')-e^2}{f_1'+f_2'-e}$; $x_H = \frac{ef_1'}{f_1'+f_2'-e}$; $x_{H'} = \frac{e(f_1'-e)}{f_1'+f_2'-e}$. $-f = f' = \frac{f_1'f_2'}{f_1'+f_2'-e}$. $\overline{FA}\times\overline{F'A'} = \overline{HF}\times\overline{H'F'}$; $V = V_1+V_2-eV_1V_2$.

II : $\alpha > 0$. $f(r) = -\frac{C^2}{r^2}+\frac{2K}{r}-\frac{K}{\alpha}$. Ellipse, paramètre q, excentricité ε ; $r_0 = \frac{K\alpha-\sqrt{K^2\alpha^2-KC^2\alpha}}{K}$, $r_1 = \frac{K\alpha+\sqrt{K^2\alpha^2-KC^2\alpha}}{K}$, $q = \frac{C^2}{K}$, $\varepsilon = \sqrt{1-\frac{C^2}{K\alpha}}$. $r_{\min} = 1,6985$ UA. $K = 39,478$; après $3,279$ années.