

SÉRIE D'EXERCICES N° 13

Ce document comporte 4 pages.

ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE

A : Électrostatique

A.I- Longueur d'écrantage

Dans un plasma chargé, les densités particulières des ions et électrons, particules de charges respectives $q = \pm e$ vérifient $n_{\pm} = n_0 \exp(-E_p(q)/k_B T)$, où $E_p(q)$ est l'énergie potentielle de la charge q en un point de potentiel V ; la température du plasma vérifie $k_B T \gg |E_p|$. Le potentiel est créé par les charges du plasma et par une sphère de petite dimension, de charge Q_0 placée à l'origine des coordonnées.

- 1. Montrer l'équation différentielle $\ell^2 \Delta V = V(r)$, où r est la distance à l'origine des coordonnées.
- 2. En déduire $V(r)$; commenter.

A.II- Ellipsoïde conducteur

Un fil FF' de longueur $2c$, confondu avec un segment de centre O et de longueur $2c$ de l'axe (Oz) , porte la charge q uniformément répartie.

- 1. Exprimer le potentiel en tout point de l'espace et le champ \vec{E} sur les axes (Ox) et (Oz) ; commenter les expressions asymptotiques à grande distance.
- 2. Montrer qu'un ellipsoïde de foyers F et F' est équipotentiel et calculer son potentiel.
- 3. Un ellipsoïde métallique de foyers F et F' est porté au potentiel V_0 ; calculer la charge surfacique du conducteur en $x = y = 0$ et en $z = 0$; commenter.

A.III- Polarizabilité atomique

Un atome est décrit comme une sphère de centre O et de rayon a qui, sous l'action d'un champ électrique extérieur \vec{E}_0 , acquiert un moment dipolaire électrique \vec{p} ; le déplacement des charges atomiques sous l'action de \vec{E}_0 sera décrit comme si la sphère était formée d'un conducteur métallique.

On cherchera le potentiel électrostatique au point \vec{r} autour de l'atome sous la forme $V = \vec{E}_0 \cdot \vec{r} f(r)$, avec $r = \|\vec{r}\|$.

- 1. Déterminer $f(r)$.
- 2. En déduire la polarizabilité α de l'atome, définie par $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_0$.
- 3. Un atome de moment dipolaire permanent \vec{p}_0 étant disposé à l'origine des coordonnées, montrer que la force exercée sur un autre atome de polarizabilité α situé en \vec{r} s'écrit $\vec{F} = -k \cdot r^{-q} \vec{e}_r$, et exprimer k et q .

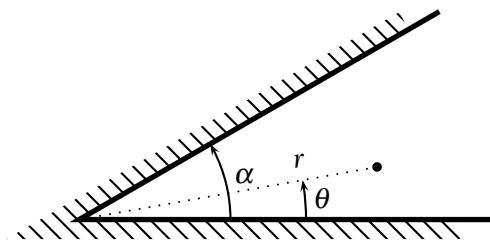
A.IV- Dièdre métallique

Un dièdre métallique limité par deux plans formant entre eux l'angle α est porté au potentiel V_0 ; En tout point M situé entre les plans du dièdre, le potentiel $V(M)$ sera recherché sous la forme $V(M) = V_0 + f(r)g(\theta)$.

On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées cylindro-polaires,

$$\Delta F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

- 1. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $g(\theta)$.
- 2. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$.
- 3. Quel est le comportement de la densité surfacique de charge à la distance r de l'arête du dièdre? Discuter.



A.I : $\ell = \sqrt{\frac{2n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T}}$. $V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(-r/\ell)$.

A.II : $V = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}-z+c}{\sqrt{x^2+y^2+(z+c)^2}-z-c}$. $\vec{E}_{y=z=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x \sqrt{x^2+c^2}} \vec{e}_x \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$. $\vec{E}_{x=y=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (z^2-c^2)} \vec{e}_z \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$. $\frac{x^2+y^2}{a^2-c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ impose $V = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \ln \frac{a+c}{a-c}$. $\sigma(x=y=0, z=a) = \frac{2\epsilon_0 c V_0}{b^2 \ln \frac{a+c}{a-c}}$, $\sigma(x=a, y=z=0) = \frac{2\epsilon_0 c V_0}{ab \ln \frac{a+c}{a-c}}$; effet de pointe.

A.III : $f(r) = \frac{a^3}{r^3} - 1$. $\alpha = 4\pi a^3$. $q = 7$, $k = \frac{3\alpha p_0^2}{2\pi^2 \epsilon_0}$.

A.IV : $\frac{d^2 g}{d\theta^2} = -n^2 g$; $g(\theta) = g_0 \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}$. $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) = \frac{\pi^2}{\alpha^2} f(r)$; $f(r) = f_0 r^{\pi/\alpha}$. $\sigma \propto r^{\pi/\alpha-1} \rightarrow \infty$ si $\alpha > \pi$ (pouvoir des pointes).

B : Condensateurs**B.I- Câble coaxial**

Un câble coaxial de grande longueur est formé d'une armature métallique centrale de rayon a entourée d'une armature externe de rayon $b > a$.

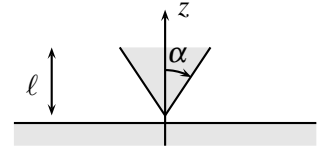
1. Exprimer la capacité unitaire (par unité de longueur) du câble.
2. La partie centrale (armature de rayon a) est en fait formée de deux demi-cylindres accolés. Exprimer la résultante des forces exercées par unité de longueur sur une moitié de cette armature, lorsque le câble est alimenté sous la tension U .

B.II- Microscope à force atomique

La pointe du microscope est formée d'un cône de demi-angle au sommet α , de hauteur ℓ , de potentiel V_0 , disposée à très faible hauteur ε au-dessus d'un plan de potentiel nul.

En coordonnées sphériques, on supposera $\vec{E} = E(r)\vec{e}_\theta$.

1. Exprimer $E(r)$, et la capacité du système formé par le plan et la pointe du microscope.
2. Quelle est la force exercée sur la pointe du microscope ?

**B.III- Capacité linéique**

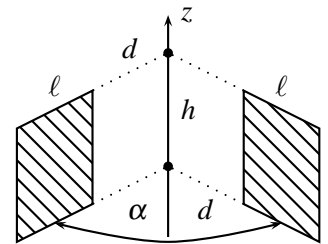
Deux fils conducteurs métalliques en forme de cylindres de même rayon a , de même longueur ℓ sont disposés parallèlement, leurs axes (O_1z) et (O_2z) étant distants de q , avec $\ell \gg d \gg a$. Les centres O_1 et O_2 sont alignés sur l'axe (Ox), disposés symétriquement par rapport à O .

1. On porte les deux fils aux potentiels V_1 et V_2 ; calculer leurs charges.
2. À quelle condition ce système forme-t-il un condensateur ? Calculer alors sa capacité.

B.IV- Condensateur diédrique

Deux plaques métalliques formant un dièdre d'angle α et de hauteur h sont limitées entre les distances d et $d + \ell$ de leur axe commun (Oz). On négligera tout effet de bord en supposant que les lignes du champ électrique sont des cercles d'axe (Oz), le champ étant nul hors du domaine diédrique délimité par les plaques.

1. Calculer la capacité de ce condensateur.
2. Exprimer le moment relativement à (Oz) des forces électrostatiques exercées sur une des plaques, lorsque la tension entre celles-ci est V_0 .

**B.V- Ligne électrique et sol**

Une ligne électrique est formée d'un câble (\mathcal{C}) cylindrique de grande longueur, de rayon a , dont l'axe, horizontal, est disposé à la hauteur ℓ au-dessus du sol plan et horizontal (Oxy). On porte le câble au potentiel V_0 relativement au sol. L'axe (Oz) est vertical et passe par le sol (en O) et par le centre du câble (en A , avec $z_A = \ell > 0$).

1. Montrer que la répartition des potentiels est la même que celle qui serait créée par deux fils infinis, parallèles, portant respectivement les densités linéiques de charge $+\lambda$ et $-\lambda$ uniformes, disposés en $z = +d$ et $z = -d$ respectivement. On exprimera d et λ .
2. En déduire la capacité par unité de longueur du condensateur formé par le câble (\mathcal{C}) et le sol.
3. Quelle sont la direction, le sens et la norme de la force exercée par unité de longueur de câble (\mathcal{C}) sur celui-ci par le sol ?

C : Magnétostatique**C.I- Bobines de Helmholtz**

Deux bobines plates, de même axe (Oz), de même rayon a , sont disposées symétriquement relativement à O , à la distance d l'une de l'autre ; elles sont parcourues par le même courant i .

$$\text{B.I : } C_u = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \cdot F_u = \frac{2\epsilon_0 U^2}{a \ln^2(b/a)}.$$

$$\text{B.II : } E(r) = \frac{V_0}{r(\pi/2 - \alpha)} ; C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\pi/2 - \alpha} \ell \tan \alpha. \vec{F} = -\frac{\pi\epsilon_0 V_0^2 \sin^2 \alpha}{(\pi/2 - \alpha)^2} \ln \frac{\ell}{\epsilon \cos \alpha} \vec{e}_z.$$

$$\text{B.III : } Q_1 = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\ln^2(\ell/a)} [V_1 \ln(\ell/a) - V_2 \ln(\ell/d)]. V_1 = -V_2 ; C = \frac{\pi\epsilon_0 \ell}{\ln(d/a)}.$$

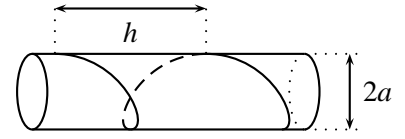
$$\text{B.IV : } C = \frac{\epsilon_0 h}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\ell}{d} \right). \mathcal{M} = \frac{\epsilon_0 h^2}{2\alpha^2} \ln \left(1 + \frac{\ell}{d} \right) V_0^2, \text{ attractif.}$$

$$\text{B.V : } d = \sqrt{\ell^2 - a^2} ; \lambda = \pi\epsilon_0 V_0 \ln \frac{\ell+a}{\ell-a}. C_u = \pi\epsilon_0 \ln \frac{\ell+a}{\ell-a}. \text{ Verticale, attractive, } F_u = \frac{\pi\epsilon_0 V_0^2}{4\sqrt{\ell^2 - a^2}} \ln^2 \frac{\ell+a}{\ell-a}.$$

- 1. Exprimer un développement limité des composantes cylindriques $B_r(r, z)$ et $B_z(r, z)$ en fonction de r et de $B_0(z) = B_z(r = 0, z)$.
- 2. À quelle condition \vec{B} est-il quasiment uniforme au voisinage de O ? Déterminer cette valeur de \vec{B} .

C.II– Bobinage hélicoïdal serré

Sur la périphérie d'un cylindre de rayon a , d'axe (Oz) et de grande longueur, on réalise un bobinage serré hélicoïdal, les fils transportant tous le même courant i_0 . Chaque fil forme une hélice d'axe (Oz) , de rayon a et de pas h ; l'élément de longueur dz du cylindre comporte ndz fils.



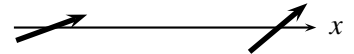
- 1. Déterminer le champ magnétique en tout point.
- 2. Proposer un potentiel vecteur compatible avec la jauge de Coulomb.

C.III– Boule supraconductrice magnétisée

Un matériau supraconducteur (de type I) peut être parcourus de courants surfaciques circulant sans aucune dissipation de puissance, de façon à assurer la nullité du champ \vec{B} en tout point intérieur au supraconducteur. Une boule supraconductrice de centre O et de rayon a est soumise à un champ magnéto-statique \vec{B}_{ext} uniforme; on constate qu'elle acquiert une répartition de courants surfaciques donnée, en coordonnées sphériques, par $\vec{j}_s = -j_{s0} \sin \theta \vec{e}_\phi$.

- 1. Exprimer sous la forme $\vec{A}(M) = -k\epsilon_0\mu_0 j_{s0} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_u(M)$ le potentiel vecteur créé en un point M quelconque par ces courants, en fonction du champ électrostatique $\vec{E}_u(M)$ créé par une boule de centre O et de rayon a qui porterait une densité volumique de charge unité.
- 2. En déduire \vec{B}_p , champ propre des courants supraconducteurs en tout point de l'espace.
- 3. Exprimer le moment dipolaire magnétique \vec{m} de la boule sous la forme $\vec{m} = -\kappa \vec{B}_{ext}$.

C.IV– Interaction de deux aimants



À une distance d l'un de d'autre, on dispose deux aimants identiques, de même moment dipolaire magnétique m , qui peuvent librement tourner autour d'un axe vertical avec le même moment d'inertie J . Les angles formés par les deux aimants avec l'axe qui les joint sont nommés θ_1 et θ_2 .

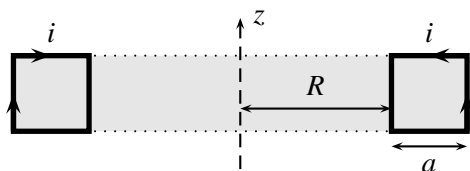
- 1. Exprimer l'énergie potentielle d'interaction des deux aimants.
- 2. Déterminer les positions d'équilibre; discuter leur stabilité.
- 3. Exprimer les pulsations propres d'oscillation autour des positions d'équilibre stable.

D : Inductances propres et mutuelles

D.I– Câble coaxial

Un câble coaxial de grande longueur est formé d'une armature métallique centrale de rayon a entourée d'une armature externe de rayon $b > a$.

- 1. Exprimer l'inductance propre unitaire (par unité de longueur) du câble.
- 2. Comparer au résultat de l'exercice B.I. Quelles sont les caractéristiques (vitesse de propagation, impédance caractéristique) des ondes électriques le long d'un tel câble?



D.II– Tore à section carrée

Un tore à section carrée de côté a est compris entre deux cylindres de rayons R et $R + a$ et d'axe (Oz) . Il comporte $N \gg 1$ tours de fil formant des spires pratiquement carrés et jointives, régulièrement enroulés sur la face latérale du tore.

- 1. Calculer l'inductance propre du tore.

C.I : $B_r(r, z) = -\frac{1}{2} \frac{dB_0}{dz} r + \frac{1}{16} \frac{d^3 B_0}{dz^3} r^3$; $B_z(r, z) = B_0(z) - \frac{1}{4} \frac{d^2 B_0}{dz^2} r^2 + \frac{1}{64} \frac{d^4 B_0}{dz^4} r^4$. $d = a$; $\vec{B} = \frac{8\mu_0 i}{5\sqrt{5}a} \vec{e}_z$.

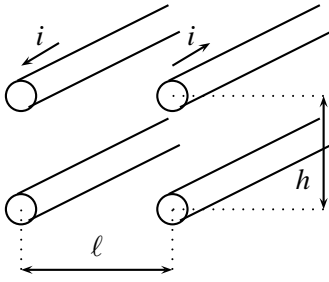
C.II : $\vec{B}_{r < a} = \mu_0 n i_0 \sin \alpha \vec{e}_z$ et $\vec{B}_{r > a} = \mu_0 n i_0 \frac{a}{r} \cos \alpha \vec{e}_\theta$ avec $\tan \alpha = \frac{2\pi a}{h}$. $\vec{A}_{r < a} = \frac{\mu_0 n i_0 \sin \alpha}{2} r \vec{e}_\theta$; $\vec{A}_{r \geq a} = \mu_0 n i_0 \left[\sin \alpha \frac{a^2}{2r} \vec{e}_\theta + \cos \alpha \ln \frac{a}{r} \vec{e}_z \right]$.

C.III : $k = 1$. $\vec{B}_p = -\frac{2}{3} \mu_0 j_{s0} \vec{e}_z$ pour $r < a$, $\vec{B}_p = -\mu_0 j_{s0} \frac{a^3}{r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta]$. $\kappa = \frac{2\pi a^3}{\mu_0}$.

C.IV : $E_p = W_0 [\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2]$, $W_0 = \frac{\mu_0 m^2}{4\pi d^3}$. $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ (stable), $(0, \pi)$, $(\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, -\pi/2)$ (instables) et équivalentes. $\omega = \sqrt{\frac{W_0}{J}}$ (antisymétrique) ou $\omega = \sqrt{\frac{3W_0}{J}}$ (symétrique).

D.I : $L_u = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$. $v_\phi = v_g = c$; $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\ln(b/a)}{2\pi}}$.

- 2. Calculer l'inductance mutuelle du tore et d'un circuit filiforme assimilé à un fil infini confondu avec l'axe du tore.
- 3. Montrer que chacune des faces du tore est soumise à une force par unité de surface que l'on déterminera.



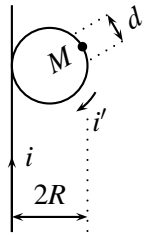
D.III- Lignes bifilaires

Une ligne électrique bifilaire est formée de deux fils cylindriques, de même rayon a , dont les axes sont distants de $l \gg a$. le courant i parcourt les deux fils de la ligne. Une seconde ligne, identique à la première, est disposée à la distance $h \gg a$ de celle-ci. Les courants électriques seront supposés répartis uniformément à la surface de chaque fil.

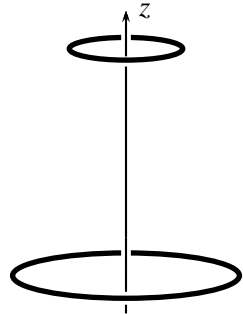
- 1. Calculer l'inductance propre de la ligne bifilaire par unité de longueur.
- 2. Exprimer la vitesse de propagation d'un signal électrique le long de cette ligne. On se reportera à l'exercice B.III.
- 3. Calculer l'inductance mutuelle des deux lignes par unité de longueur.

D.IV- Anneau et fil droit

On considère le circuit (C) parcouru par un courant i formé d'un fil de grande longueur, et le circuit (C') parcouru par un courant i' formé d'un cercle de rayon R tangent (mais sans contact électrique) au circuit (C) . Les courants électriques seront supposés répartis uniformément à la surface de chaque fil.



- 1. Calculer l'inductance mutuelle des deux circuits, en fonction de l'angle α fait par le fil (C) avec le plan du circuit (C') .
- On tient compte maintenant du faible rayon a du fil formant le circuit (C') , qui sera considéré, au voisinage d'un de ses points M , comme l'association d'une portion de cylindre de rayon a , de centre M et de longueur d , et d'une portion de cercle de longueur $2\pi a - d$ et de rayon négligeable.
- 2. Exprimer le potentiel vecteur \vec{A}_p créé en M par le cylindre de longueur $d \gg a$.
 - 3. Exprimer le potentiel vecteur \vec{A}_l créé en M par la portion de cercle de longueur $2\pi a - d$.
 - 4. En déduire l'inductance propre de (C') .



D.V- Lévitacion magnétique

On dispose autour du même axe vertical deux spires plates ; l'une, comportant N_1 spires et située à l'abscisse $z_1 = 0$, est de rayon a_1 et transporte le courant $i_1(t) = i_0 \sin(\omega t)$ imposé par un générateur pour $t > 0$. L'autre, comportant N_2 spires et située à l'abscisse $z_2 = z$ variable, est de rayon a_2 , d'inductance propre L_2 et est formée de matériau supraconducteur ; le courant qu'elle porte vérifie $i_2(t = 0) = 0$.

On note aussi $M(z)$ l'inductance mutuelle des deux circuits.

- 1. Exprimer $i_2(t)$.
- 2. Calculer la force \vec{F} exercée sur la spire supérieure en fonction de $M(z)$.
- 3. On suppose que $z \gg a_1$ et a_2 . Expliciter $M(z)$ et la moyenne $\langle \vec{F} \rangle$.

D.II : $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2} \ln(1 + e/R)$. $M = \pm L/N$. $\frac{d\vec{F}}{ds} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 (R+e)^2} \vec{e}_r$.

D.III : $\frac{dL}{dz} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{l}{a}$. $v = c$. $M = \pm \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{l^2 + h^2}{l^2}$.

D.IV : $M = \mu_0 R \cos \alpha$. $\vec{A}_p = \frac{\mu_0 i'}{2\pi} \ln \frac{d}{a} \vec{e}_\theta$. $\vec{A}_l = \frac{\mu_0 i'}{2\pi} \ln \frac{8R}{d} \vec{e}_\theta$. $L = \mu_0 R \ln \frac{8R}{d}$.

D.V : $i_2(t) = -\frac{M(z)}{L_2} i_0 \sin(\omega t)$. $\vec{F} = -\frac{M(z)}{L_2} \frac{dM}{dz} i_0^2 \sin^2(\omega t) \vec{e}_z$. $M(z) = \mu_0 \frac{\pi a_1^2 a_2^2}{2z^2}$ donc $\langle \vec{F} \rangle = \frac{3\mu_0^2 \pi^2 a^4 b^4 i_0^2}{8L_2 z^4} \vec{e}_z$.