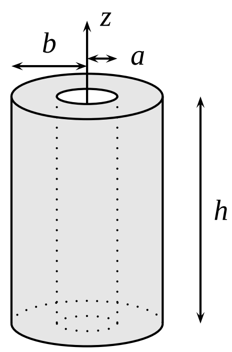
SÉRIE D'EXERCICES N° 9

Ce document comporte 3 pages.

ÉQUATIONS DE MAXWELL

A : Régimes statiques ou quasi-statiques

A.I– Conduction électrique et champ magnétostatique



Un matériau conducteur occupe le volume compris entre les distances a et $b > a$ de l'axe (Oz), sur une grande hauteur h ; on impose dans toute la région le champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$; on négligera debvant B_0 le champ magéntique propre. La matériau est conducteur, caractérisé par la conductivité γ et par la constante de Hall $\mathfrak{R}_H$.
Le cylindre intérieur $r = a$ est porté au potentiel V_0, le cylindre exétrieur $r = b$ au potentiel $V = 0$. On néglige tout effet de bord et on se place en régime permanent : les champs $\vec{E}$ et $\vec{j}$ ne sont fonctions que de (x,y) ou (r,θ) en coordonnées polaires.
☐ **1.** Montrer que $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont des vecteurs du plan (Oxy), et montrer que le milieu est partout localement neutre.
☐ **2.** Déterminer $\vec{E}$ et $\vec{j}$ ainsi que la résistance électrique $\mathscr{R}(B_0)$ du manchon cylindrique.

A.II– Plaque supraconductrice

On étudie, en régime permanent et en l'absence de tout champ électrique, un matériau supraconducteur comportant $n = 7,5 \times 10^{28}$ m^{-3} électrons de conduction par unité de volume, de masse $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg et de charge électrique $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C. Un tel milieu vérifie la relation de London $\rho = 0$, $\vec{j} = -\dfrac{ne^2}{m}\vec{A}$, où $\vec{A}$ est un potentiel vecteur ;
☐ **1.** Quelle est la relation de jauge ? Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\vec{B}$?
Le supraconducteur forme une plaque d'épaisseur $2e = 1$ mm, de normale (Oz), de grandes dimensions transverses ; le champ magnétique dans le vide à l'extérieur de la plaque est $\vec{B}_{z=\pm e} = B_0\vec{e}_x$.
☐ **2.** Déterminer le champ magnétique en tout point et les courants volumiques dans la plaque. Proposer un modèle surfacique équivalent.
☐ **3.** Quelle est la force exercée par unité de surface au voisinage de $z = \pm e$?

A.III– Boule métallique polarisée

Une boule de centre O et de rayon a est formée d'un matériau parfaitement conducteur ; en régime statique, elle vérifie donc $\vec{E} = \vec{0}$ partout à l'intérieur, sous l'influence combinée du champ électrique $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z$ imposé de l'extérieur à grande distance de la boule, et des charges électriques qu'elle acquiert.
On admet alors que le potentiel en tout point M situé à l'extérieur de la boule s'écrit, en coordonnées sphériques de centre O de d'axe (Oz), $V = \cos\theta\,(\alpha r + \beta r^n)$.
☐ **1.** Déterminer n, α et β.
☐ **2.** Déterminer la charge de la demi-boule supérieure $(z > 0)$ et le moment dipolaire électrique de la boule.

A.IV– Énergie magnétique d'une bobine

Une bobine solénoïde d'axe (Oz) de rayon a et de longueur ℓ comporte N tours de fil parcourues par le courant $i(t)$; on admet que le champ magnétique créé s'écrit, en tout point intérieur à la bobine, $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 N}{\ell}i(t)\vec{e}_z$ et $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur.
On réalise une montée progressive du courant depuis la valeur $i(0) = 0$ jusqu'à la valeur finale $i(\infty) = i_0$.

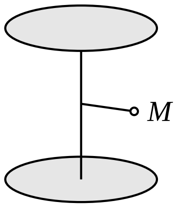
A.I : $j_z = 0$ donc $E_z = 0$; $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{E} = 0$ donc $\operatorname{div}\vec{E} = 0$. $\Delta V = 0$ donc $\vec{E} = -\frac{V_0}{\ln(b/a)}\frac{\vec{e}_r}{r}$; $j_r = \frac{\gamma E_r}{1+\gamma^2\mathfrak{R}_H^2 B_0^2}$ et $j_\theta = -\gamma\mathfrak{R}_H B_0 j_r$; $\mathscr{R}(B_0) = (1+\gamma^2\mathfrak{R}_H^2 B_0)\mathscr{R}_0^2$ où $\mathscr{R}_0 = \frac{\ln b/a}{2\pi\gamma h}$.

A.II : $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. $\Delta\vec{B} = \frac{1}{\delta^2}\vec{B}$, $\delta = 1,9 \times 10^{-8}$ m. $\vec{B} = B_0\vec{e}_x\frac{\operatorname{ch}(z/\delta)}{\operatorname{ch}(e/\delta)}$ pour $|z| \leqslant a$, $\vec{B} = B_0\vec{e}_x$ sinon ; $\vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0\delta}\vec{e}_y\frac{\operatorname{sh}(z/\delta)}{\operatorname{ch}(e/\delta)}$ pour $|z| \leqslant a$. $\delta \ll e$ donc $\vec{B} = \vec{0}$ à l'intérieur, $\vec{j}_s = \pm\frac{B_0}{\mu_0}\vec{e}_y$ en $z = \pm e$. $\frac{d\vec{F}}{dS} = \pm\frac{B_0^2}{2\mu_0}\vec{e}_z$.

A.III : $n = -2$, $\alpha = -E_0$, $\beta = E_0 a^3$. $q = 3\pi\varepsilon_0 a^2 E_0$; $\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3\vec{E}_0$.

☐ **1.** Expliciter le vecteur de Poynting à la surface de la bobine. Quelle équation de Maxwell ne peut pas être satisfaite dans cette approximation ?
☐ **2.** Quelle est l'énergie totale rayonnée vers la bobine ?
☐ **3.** On suppose $i(t) = i_0 t/\tau$ pour $0 < t < \tau$. Comparer, dans cet intervalle, les énergies électrique et magnétique acquises.

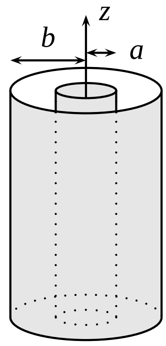
B : Régimes de propagation



B.I– Condensateur et régime variable

Dans un condensateur cylindrique de rayon a, on cherche en régime harmonique forcé de pulsation ω un champ électrique de la forme $\vec{E} = E_0(r,z)\exp(i\omega t)\,\vec{e}_z$ au point M de coordonnées cylindriques (r,θ,z). Le métal des armatures ($z \leqslant 0$ et $z \geqslant h$) est parfait : $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$.
☐ **1.** Relier la charge $\pm q(t)$ portée par les armatures et le courant de déplacement $I_D(t)$.
☐ **2.** Exprimer $E_0(r,z)$ sous forme d'une série entière ; à quelle condition peut-on considérer que $\vec{E}$ est uniforme ?

B.II– Onde non dispersée dans un coaxial



Un câble coaxial est formé de deux conducteurs métalliques parfaits, cylindriques, formant l'armature interne ($r \leqslant a$) et l'armature externe ($r \geqslant b$) du câble, de grande longueur. Dans l'espace vide inter-armatures, on étudie la propagation d'une onde de champs $\vec{E} = f(r)\mathfrak{F}(z,t)\vec{e}_r$, $\vec{B} = g(r)\mathfrak{F}(z,t)\vec{e}_\theta$, dans le sens de l'axe (Oz).
☐ **1.** Expliciter $f(r)$ et $g(r)$; on supposera $f(a) = 1$.
☐ **2.** Expliciter la puissance tarnsportée le long du câble, et l'énergie électromagnétique linéique.
☐ **3.** Quelle est le courant $I(z,t)$ transporté par le câble à l'abscisse z ? Quelle est la circulation $V(z,t)$ de $\vec{E}$ entre les armatures, le long d'un contour d'abscisse z ? Commenter.

B.III– Réflexion métallique

☐ **1.** Une onde plane progressive polarisée elliptiquement à droite (VED) tombe sous incidence normale sur un miroir parfait. Quelle est la polarisation de l'onde réfléchie ?
☐ **2.** Une couche photosensible est déposée sur un support métallique formant un miroir parfait ; la couche noircit sous l'action du champ électrique. On éclaire l'ensemble au moyen d'une onde polarisée rectilignement parallèlement au miroir. En incidence normale, on constate un noiricssement de la couche sensible sur un plan situé à la distance 10^{-5} mm du miroir. Quelle est la fréquence de l'onde ? À quelle distance le noircissement aura-t-il lieu si le miroir est éclairé sous une incidence de 30° ?

B.IV– Superposition d'ondes planes

On étudie la superposition dans le vide de deux ondes planes progressives, monochromatiques de même pulsation ω, polarisées rectilignement selon (Ox) et de même amplitude E_0. Ces deux ondes se propagent dans deux directions du plan (Oyz), symétriques relativement à (Oz) et faisant entre elles l'angle 2α. Toutes les questio ns sont relatives à l'onde « totale » obtenue par cette superposition.
☐ **1.** Déterminer la direction et la vitesse de propagation de la phase de l'onde.
☐ **2.** Montrer que la puissance transportée par l'onde est maximale sur des plans équidistants de ℓ ; déterminer ℓ.
☐ **3.** Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et la densité volumique d'énergie électromagnétique en moyenne spatiale et temporelle ; quelle est la vitesse de transport de l'énergie ?

B.V– Onde cylindrique

On étudie, dans le cadre de la jauge de Lorentz, une onde de pulsation ω, a symétrie cylindrique, de potentiel vecteur donné, en coordonnées cylindriques (r,θ,z), par $\vec{A}(r,t) = A_0(r)\vec{e}_z\exp[i(\omega t - kr)]$.

A.IV : $\vec{\Pi} = -\frac{\mu_0 N^2}{2\ell^2} i \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r$; Maxwell-Ampère. $W_r = \frac{1}{2}\mathscr{L} i_0^2$, $\mathscr{L} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{\ell}$. $W_e/W_m = a^2/8c^2t^2 \ll 1$.

B.I : $I_D(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. $E_0(r,z) = E_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k!}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^k\right]^2$; il faut $a\omega \ll c$.

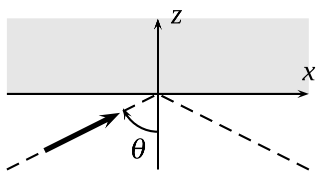
B.II : $f(r) = a/r$; $g(r) = a/cr$. $\mathscr{P} = 2\pi\varepsilon_0 c a^2 \mathfrak{F}^2(z-ct)\ln(b/a)$; $\frac{\mathrm{d}W_{em}}{\mathrm{d}z} = \mathscr{P}/c$. $I(z,t) = \frac{2\pi a}{\mu_0 c}\mathfrak{F}(z-ct)$; $V(z,t) = a\ln(b/a)\mathfrak{F}(z-ct)$; $\mathscr{P} = I\times V$.

B.III : VEG. $f = 7{,}5\times 10^{15}$ Hz ; 2×10^{-5} mm.

B.IV : $\vec{v}_\varphi = \frac{c}{\cos\alpha}\vec{e}_z$. $\ell = \frac{\lambda}{2\sin\alpha}$. $\vec{\Pi} = \frac{E_0^2\cos\alpha}{\mu_0 c}\vec{e}_z$; $w = \varepsilon_0 E_0^2$; $\vec{v}_E = c\cos\alpha\,\vec{e}_z$.

☐ **1.** Que vaut le potentiel V ? Exprimer l'équation différentielle vérifiée par A_0.
☐ **2.** À quelles conditions peut-on admettre des solutions $A_0(r) \sim$ cte ? Exprimer dans ce cas le champ électromagnétique et le vecteur de Poynting.
☐ **3.** En admettant qu'une telle onde pusise modéliser l'émission par une antenne cylindrique de grande longueur, donner une expression approchée de $A_0(r)$ à grande distance de l'axe (Oz) de l'antenne.

B.VI– Interface air–plasma



Un palsma ionisé, partout localement neutre, comportant $N = 10^{11}$ m^{-3} particules mobiles de charge $q = -1,6 \times 10^{-19}$ C et de masse $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg par unité de volume, occupe la région $z > 0$; l'air qui occupe la région $z < 0$ est assimilé au vide. Une onde incidente de champ électrique $\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right]$, de fréquence $f = 3$ MHz, se propage dans l'air en direction du plasma, atteint sous l'incidence $\theta = 30°$.
☐ **1.** Quelle est la fréquence de coupure pour la propagation dans ce plasma ?
☐ **2.** Montrer l'existence d'une onde de surface ; expliciter sa direction de propagation, sa période spatiale et sa longueur de pénétration dans le plasma.
☐ **3.** Déterminer complètement l'onde réfléchie ; préciser le coefficient de réflexion énergétique.

B.VII– Effet Faraday

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique progressive plane monochromatique, de pulsation ω, de direction de propagation (Oz), dans un milieu matériel vérifiant les relations constitutives $\rho = 0$ (milieu neutre) et $\vec{j} = \dfrac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{i\omega}[M]\vec{E}$, où $[M] = \begin{bmatrix} 1 & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $0 < \alpha < 1$ et ω_p étant des constantes réelles.
☐ **1.** Quelles sont les équations de dispersion et les polarisations possibles ?
☐ **2.** Une onde de haute fréquence, polarisée rectilignement selon (Ox) pénètre dans ce milieu en $z = 0$ puis en sort en $z = \ell$. Quel est alors son état de polarisation ?

B.V : $V = 0$; $\frac{\mathrm{d}^2 A_0}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}r}(1 - 2ikr) - ikA_0(1 - ikr) = -\frac{\omega^2}{c^2} r A_0$. $r \gg \lambda$, $k = \omega/c$; $\vec{B} = \frac{\omega A_0}{c} \exp[i(\omega t - kr)]\,\vec{e}_\theta$, $\vec{E} = -\omega A_0 \exp[i(\omega t - kr)]\,\vec{e}_z$, $\vec{\Pi} = \frac{\omega^2 A_0^2}{\mu_0 c} \cos^2[\omega(t - r/c)]\,\vec{e}_r$. $A_0 \propto 1/\sqrt{r}$.

B.VI : $f_P = 2,8$ MHz. $\vec{k}_P = \frac{2\pi f}{c} \sin\theta \vec{e}_x - i\frac{2\pi}{c}\sqrt{f_P^2 - f^2 \cos^2\theta}\,\vec{e}_z$; propagation selon (Ox), $\Lambda = 200$ m ; absorption selon (Oz), $\delta = 17$ m. $\vec{E}' = E_0' \vec{e}_y \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x\sin\theta - z\cos\theta}{c}\right)\right]$ avec $E_0' = -E_0 \frac{\Lambda - 2i\pi\delta}{\Lambda + 2i\pi\delta}$; $R = 1$.

B.VII : $[M]\vec{E} = \frac{\omega^2 - c^2k^2}{\omega_p^2}\vec{E}$ donc $E_z = 0$, et $\omega^2 = c^2k^2 + \omega_p^2(1 - \alpha)$ et $E_y = -iE_x$ (VCG) et $\omega^2 = c^2k^2 + \omega_p^2(1 + \alpha)$ et $E_y = iE_x$ (VCD). Polarisation rectiligne tournée de $\theta = (k_D - k_G)\ell \simeq -\frac{\omega_p^2\,\alpha}{c\omega}\ell$ dans (Oxy).