SÉRIE D'EXERCICES N^o 7

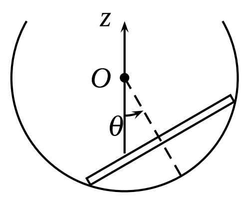
Ce document comporte 3 pages.

SYSTÈMES RIGIDES ET ARTICULÉS

Moments d'inertie de solides homogènes relativement à un axe Δ :
- cylindre plein de masse m et de rayon R, Δ est l'axe de symétrie : $J_\Delta = \frac{mR^2}{2}$;
- barre mince de masse m et de longueur ℓ, Δ est orthogonal à la barre et passe par son centre : $J_\Delta = \frac{m\ell^2}{12}$;
- boule pleine de masse m et de rayon R, Δ est un des diamètres : $J_\Delta = \frac{2mR^2}{5}$.
- sphère creuse de masse m et de rayon R, Δ est un des diamètres : $J_\Delta = \frac{2mR^2}{3}$.

A : Glissement sans frottement

A.I– Barre glissant dans un cylindre



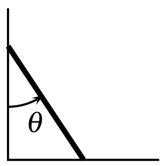
Une barre mince homogène, de masse m et de longueur ℓ, peut glisser sans aucun frottement à l'intérieur d'un cylindre fixe de rayon R et de centre O. On désigne par θ l'angle formé par la barre avec l'horizontale. On note encore g l'accélération de la pesanteur. On admettra que le contact entre le cylindre et les extrémités de la barre n'est jamais rompu.

☐ **1.** Exprimer la pulsation ω_0 des petites oscillations de la barre.

☐ **2.** On lance la barre depuis sa position d'équilibre $\theta = 0$ en lui donnant une vitesse initiale $\Omega_0 = \dot{\theta}(t=0)$. Exprimer l'amplitude maximale $\alpha = \theta_{\max}$ des oscillations.

☐ **3.** Préciser le lien entre la période $T(\alpha)$ du mouvement, $T_0 = T(\alpha \to 0)$ et α ; développer cette expression au premier ordre non nul.

A.II– Échelle posée sur un mur



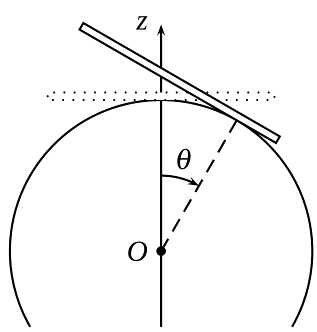
Une échelle, assimilée à une barre mince homogène, de masse m et de longueur ℓ, peut glisser sans aucun frottement sur le sol horizontal et sur un mur vertical. On note g l'accélération de la pesanteur. On abandonne la barre sans vitesse initiale depuis une position quasiment verticale ($\theta \sim 0$).

☐ **1.** Exprimer l'angle θ_0 pour lequel la barre décolle du mur.

☐ **2.** Après ce décollage, la barre poursuit son mouvement jusqu'à heurter le sol. Déterminer la vitesse de son centre de masse au moment du choc.

B : Roulement sans glissement

B.I– Barre posée sur un cylindre



Une barre mince homogène, de masse m et de longueur ℓ, peut rouler sans glisser sur un cylindre fixe de rayon R et de centre O. On désigne par I le point de contact de la barre et du cylindre, et par θ l'angle formé par OI avec la verticale. On note encore g l'accélération de la pesanteur.

Lorsque $\theta = 0$, la barre est en équilibre au sommet du cylindre ; le point I coïncide alors avec son centre de masse G. On l'écarte alors de sa position initiale d'un angle θ_0 avant de l'abandonner sans vitesse initiale. On n'étudie que des mouvements de roulement sans glissement.

☐ **1.** Exprimer la vitesse v_G en fonction de R, θ et $\dot{\theta}$.

☐ **2.** Exprimer la période des oscillations, dans le cas des petits mouvements autour de l'équilibre ?

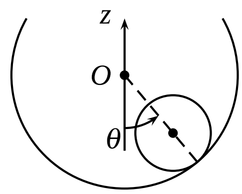
☐ **3.** À quelle condition sur le coefficient de frottement f le glissement ne s'amorce-t-il pas au début du mouvement ?

A.I : $\omega_0^2 = \frac{g\sqrt{R^2-\ell^2/4}}{R^2-\ell^2/6}$. $\cos\theta_0 = 1 - \Omega_0^2/2\omega_0^2$ si $\Omega_0 < 2\omega_0$. $T(\alpha) = T_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$; $T(\alpha) \simeq T_0(1+\alpha^2/16)$.

A.II : $\cos\theta_0 = 2/3$. Norme $v_G = \sqrt{7g\ell}/3$, composante horizontale $\sqrt{g\ell}/3$, composante verticale $\sqrt{2g\ell}/3$.

B.I : $\vec{v}_G = R\theta\dot{\theta}\vec{e}_r$. $T = \frac{\pi\ell}{\sqrt{6gR}}$. $f > \sin\theta_0 \frac{\ell^2+12R^2\theta_0^2}{\ell^2\cos\theta_0 + 12R^2\theta_0^2(2\cos\theta_0 - \sin\theta_0)}$.

B.II– Boule dans un cylindre



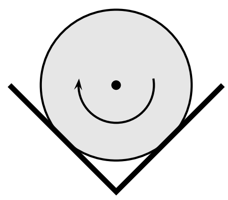
Une boule homogène, de centre C, de masse m et de rayon a, peut rouler sans glisser à l'intérieur d'un cylindre fixe de rayon $R > a$ et de centre O. On désigne par θ l'angle formé par OC avec la verticale. On note encore g l'accélération de la pesanteur.
On n'étudie que des mouvements de roulement sans glissement, la boule étant à l'instant initial posée au bas du cylindre ($\theta = 0$) avec une vitesse initiale du centre de masse v_0.
☐ **1.** À quelle condition aura-t-on toujours $|\theta| \ll \pi$? Déterminer la période de ces mouvements.
☐ **2.** À quelle condition le mouvement est-il révolutif, sans décollage ? Quelle condition doit-on imposer au coefficient de frottement ?

B.III– Boule sur un plateau tournant

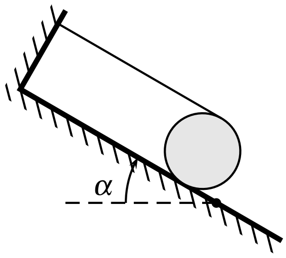
Une boule homogène, de masse m et de rayon R, est posée à l'instant $t = 0$ sur un plateau horizontal tournant, son centre G étant alors à la distance a de l'axe du plateau. On note $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire de rotation de la boule relativement au référentiel du laboratoire $(\mathscr{R})$ et on impose $\vec{\omega}(t = 0) = \vec{0}$. Par la suite, la boule roule sans glisser sur le plateau.
On note $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$ la vitesse angulaire (constante) de rotation du plateau autour de l'axe vertical (Oz) et $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.
☐ **1.** Expliciter l'équation différentielle et les conditions initiales pour la vitesse $\vec{v}$ de G dans $\mathscr{R}$.
☐ **2.** Quelle est la nature du mouvement de G ? Quelles conditions faut-il imposer au rayon du plateau tournant, et au coefficient de frottement de la boule sur le plateau ?

C : Frottement de glissement

C.I– Décollage et démarrage



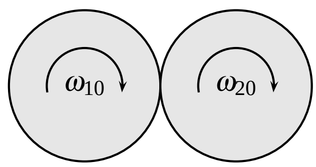
Un cylindre homogène de masse m et de rayon R est disposé entre deux plans formant un dièdre d'angle au sommet $\pi/2$, symétrique par rapport à un plan vertical. Le coefficient de frottement du cylindre sur les plans est f. On note g l'accélération de la pesanteur. Un couple moteur $\mathscr{M}$ est exercé sur l'axe (fixe) du cylindre pour le mettre en rotation.
☐ **1.** Quelle condition imposer à f pour que le contact ne soit rompu sur aucun plan ?
☐ **2.** Quelle est alors la valeur minimale de $\mathscr{M}$ qui permet la mise en rotation du cylindre ?



C.II– Glissement et frottement

Un cylindre homogène de masse m et de rayon R peut rouler et glisser sur un plan incliné d'un angle α relativement à l'horizontale ; il est retenu par un fil qui s'enroule à la partie supérieure du cylindre est reste fixé à celui-ci ; le fil, tendu, reste parallèle au plan sur lequel roule le cylindre. Le coefficient de frottement du cylindre sur le plan horizontal est f ; on note g l'accélération de la pesanteur.
☐ **1.** Quelle est la condition de mise en mouvement ?
☐ **2.** Exprimer alors la tension exercée par le fil en son point d'attache.

C.III– Glissement et frottement



Deux cylindres homogènes de masses m_1 et m_2, de même rayon a, peuvent tourner autour de leurs axes, horizontaux et parallèles, distants de $2a$; ils frottent l'un sur l'autre.
On les lance avec les vitesses angulaires initiales ω_{10} et ω_{20}.
☐ **1.** À quelle condition le mouvement peut-il se poursuivre à vitesses constantes ?
☐ **2.** On suppose ici $\omega_{10} = \omega_0 \neq 0$ et $\omega_{20} = 0$. Déterminer, entre l'instant de départ et l'état final, le travail des forces de frottement. Quelle est la variation relative du moment cinétique de l'ensemble ?

B.II : $v_0 \ll \sqrt{g(R-a)}$; $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-a)}{5g}}$. $v_0 > \sqrt{\frac{27}{14}g(R-a)}$; $f > \frac{g(R-a)}{7v_0^2-5g(R-a)}$.

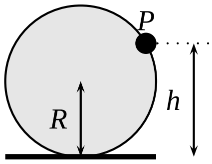
B.III : $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{7}\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$ et $\vec{v}(t=0) = \Omega a\vec{e}_y$. Cercle de centre $\left(x_C = -\frac{5}{2}a, y_C = 0\right)$, de rayon $r = \frac{7}{2}a$, parcouru à la vitesse angulaire $\frac{2}{7}\Omega$ dans le sens de la rotation du plateau. rayon du plateau $\geqslant 6a$; $f > \frac{2\Omega^2 a}{7g}$.

C.I : $f < 1$. $\mathscr{M}_{\min} = \frac{\sqrt{2}mgfa}{1+f^2}$.

C.II : $f < \frac{1}{2}\tan\alpha$. $T = \frac{mg}{3}(f\cos\alpha + \sin\alpha)$.

C.III : $\omega_{10} = -\omega_{20}$. $W_f = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}a^2\omega_0^2$. $\Delta\sigma/\sigma_i = -\frac{2m_2}{m_1+m_2}$.

D : Systèmes articulés



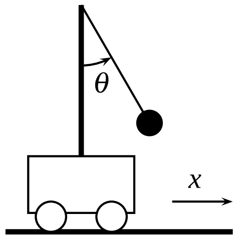
D.I– Chien sur un ballon

Un chien de cirque, assimilé au point matériel P de masse M, marche sur un ballon (sphère creuse homogène de masse m et de rayon R) de sorte que sa hauteur h au dessus du sol reste constante, $R < h < 2R$. L'ensemble est initialement immobile. On note g l'accélération de la pensateur, ω la vitesse angulaire de rotation du ballon et v la vitesse de son centre.

☐ **1.** Le ballon glisse sans frottement sur le sol. Exprimer $\omega(t)$. Exprimer la force exercée par le chien et calculer sa puissance en fonction de $\omega(t)$.

☐ **2.** Le ballon roule sans glisser sur le sol. Exprimer $v(t)$. Calculer, en fonction de v et ses dérivées, la force motrice et sa puissance.

D.II– Pendule sur un chariot



Un chariot mobile de masse M se déplace sur des roues de masse négligeable qui roulent sans glisser sur le sol horizontal. Ce mobile comporte un mat au sommet duquel est fixé un pendule simple de longueur ℓ et de même masse M. On note x le déplacement horizontal du chariot, θ l'angle d'oscillation du pendule ($|\theta| \ll \pi$) et g l'accélération de la pesanteur.

☐ **1.** Calculer la force F_r exercée sur le chariot par les axes des roues qui le supportent.

☐ **2.** À l'instant initial, l'ensemble est au repos en $x = 0$, $\theta = 0$ et on exerce une force horizontale F_0 intense pendant une courte durée τ sur le chariot. Déterminer les valeurs acquises par x, θ et leurs dérivées à la fin de cette phase d'accélération.

☐ **3.** Déterminer complètement $x(t)$ et $\theta(t)$ dans la suite du mouvement.

D.I : $\omega(t) = \frac{3M\sqrt{h(2R-h)}}{2mR^2}gt$; $\vec{F} = M\vec{g}$; $\mathscr{P} = Mg\sqrt{h(2R-h)}\omega(t)$. $v(t) = \frac{M\sqrt{h(2R-h)}}{Mh+\frac{5}{3}mR}gt$; $\vec{F} = M\left(\vec{g} - \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)$; $\mathscr{P} = \left(M + \frac{5}{3}m\right)v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

D.II : $F_r = 0$. $x_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $\dot{x}_0 = \frac{F_0\tau}{M}$, $\dot{\theta}_0 = -\frac{F_0\tau}{\ell M}$. $\theta = -\frac{F_0\tau}{\ell M\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ et $x = \frac{F_0\tau}{2M}\left(t + \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right)$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2\ell}}$.