## SÉRIE D'EXERCICES N° 6

*Ce document comporte 2 pages.*

# CONDUCTION THERMIQUE

## A : Régimes permanents

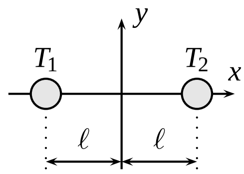
### A.I– Barre calorifugée

Une barre de longueur $\ell$ est mise en communication, à l'une de ses extrémités, avec un thermostat de température $T_1$, et à l'autre extrémité avec un thermostat de température $T_2 < T_1$. La barre, de section $s$, est calorifugée sur ses faces latérales.
Une moitié de la barre (du côté de la source chaude) est formée d'un matériau de conductivité thermique $\lambda_1$, l'autre moitié (du côté de la source froide) d'un matériau de conductivité thermique $\lambda_2$. L'ensemble fonctionne en régime permanent.
☐ **1.** Déterminer la puissance thermique qui traverse la barre.
☐ **2.** Calculer l'entropie créée par unité de temps dans la demi-barre de conductvité thermique $\lambda_1$.

### A.II– Homéothermie

On modélise un animal homéotherme par une boule de rayon $R$ et de température uniforme $T_1$. L'air qui l'environne, de conductivité thermique $\lambda$, est, à grande distance de l'animal, à la température $T_0$.
Le coefficient de transfert thermique pariétal est $\mathfrak{h}$.
☐ **1.** Déterminer la répartition de température dans l'air.
☐ **2.** Exprimer la puissance thermique crée par unité de volume à l'intérieur de l'animal.

### A.III– Fuites thermiques




Deux tuyaux cylindriques de grande longueur, de même rayon $R$ sont dispsoés parallèlement dans l'air, de conductivité thermique $\lambda$. Les axes des deux tuyaux sont distants de $2\ell$ ; leurs températures, uniformes, sont égales à $T_1$ et $T_2 < T_1$.
☐ **1.** Montrer que la température dans l'air autour des deux tuyaux peut s'écrire sous la forme $T(x,y) = \dfrac{T_1+T_2}{2} + \alpha \ln \dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}$, et déterminer $\alpha$ et $a$.
☐ **2.** En déduire la conductance de fuite thermique par unité de longueur.

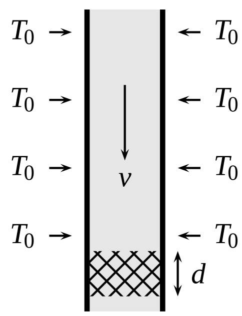
### A.IV– Effet Joule dans une couche mince

Le courant électrique dans un semi-conducteur parcourt une mince couche d'épaisseur $e$ : la zone définie par $-e < z < 0$ est donc le siège d'une production thermique volumique uniforme $p_J > 0$. Le semi-conducteur, qui occupe la totalité de l'espace $z < 0$, est considéré comme un conducteur thermique de conductivité $\lambda$ uniforme, dont la température est $T_0$ loin de la zone de passage du courant.
☐ **1.** L'air, qui occupe la région $z > 0$, est considéré un isolant thermique. Quelle est la température maximale $T_{\max}$ dans le semi-conducteur, et où est-elle atteinte ?
☐ **2.** Que vaut $T'_{\max}$ si on tient compte des transferts pariétaux (coeffiient $\mathfrak{h}$) à la surface $z = 0$ ? La température de l'air est uniforme est vaut $T_0$.
☐ **3.** À quelle condition le flux thermique de refroidissement de la zone de conduction sera-t-il réparti pour moitié dans l'air, et pour moitié dans le substrat $z < -e$ ? Comparer alors $T_{\max} - T_0$ et $T'_{\max} - T_0$.

---

**A.I** : $\mathscr{P}_t = \frac{2s}{\ell}\,\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}(T_1-T_2)$. $\frac{\delta_c S}{\mathrm{d}t} = \frac{2s\lambda_1\lambda_2^2}{\ell T_1(\lambda_1+\lambda_2)}\,\frac{(T_1-T_2)^2}{\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2}$.
**A.II** : $T(r) = T_0 + \frac{\mathfrak{h}R^2}{r}\,\frac{T_1-T_0}{\lambda+R\mathfrak{h}}$. $p_u = \frac{3\mathfrak{h}\lambda}{R(\lambda R+\mathfrak{h})}(T_1-T_0)$.
**A.III** : $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}y^2} = 0$ ; $a = \sqrt{\ell^2-R^2}$, $\alpha = (T_1-T_2)/4\ln\frac{\ell+R+a}{\ell+R-a}$. $G_u = \pi\lambda/\ln\frac{\ell+R+a}{\ell+R-a}$.
**A.IV** : $T_{\max} = T_0 + p_J e^2/2\lambda$ en $z=0$. $T_{\max} = T_0 + p_J e^2\,(\mathfrak{h}e+2\lambda/2\mathfrak{h}e+2\lambda)^2/2\lambda$. $\mathfrak{h}e = \lambda$, $(T'_{\max}-T_0)/T_{\max}-T_0 = 1/4$.

### A.V– Coulée de refroidissement




Un coulée de métal en fusion s'écoule à vitesse constante $\vec{v} = v\vec{e}_x$ le long de l'axe $(Ox)$ dans une canalisation de section circulaire de rayon $a$. La conductivité thermique, la masse volumique et la capacité thermique du métal sont des constantes notées $\lambda$, $\rho$ et $c$. À l'entrée de la coulée, la température du métal liquide vaut $T(x=0) = T_c$. Par la suite, le métal est refroidi par transfert pariétal (coefficient $\mathfrak{h}$) avec des jets de refroidissement latéraux à la température $T_0$.
Au bout d'une distance $\ell$, le métal liquide atteint son point de cristallisation (température $T_f$ avec $T_c > T_f > T_0$) ; une zone pâteuse de longueur $d$ ($\ell < x < \ell + d$) permet la cristallisation complète ; au delà de celle-ci, le métal solide poursuit à vitesse et température constantes. On note $\mathscr{L}_f$ la chaleur latente de fusion massique du métal.

☐ **1.** Exprimer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ dans la coulée en fusion.
☐ **2.** À quelle condition peut-on négliger la vitesse de la coulée ?
☐ **3.** On admet que $T_c - T_0 \gg T_f - T_0$ ; on posera $\delta = \sqrt{a\lambda/2\mathfrak{h}}$. Exprimer $\ell$ en fonction de $T_0$, $T_c$, $T_f$ et $\delta$.
☐ **4.** Exprimer, dans la même approximation, $d$ en fonction des données du problème.

## B : Régimes variables

### B.I– Refroidissement progressif

Une barre de section $s$, de longueur $\ell$, calorifugée sur ses faces latérales, n'est soumise qu'à des transferts conductifs unidimensionnels. On note $\lambda$, $c$ et $\rho$ les valeurs constantes et uniformes de la conductivité thermique, de la capacité thermique et de la masse volumique de la barre. On pose $D = \lambda/\rho c$.
Au début de l'étude, la barre était soumises depuis longtemps à une différence de température finie : $T(x=0) = T_0$ et $T(x=\ell) = T_0 + \Delta T > T_0$.
À partir de l'instant $t = 0$, la barre est thermiquement isolée en $x = \ell$ et elle évolue donc lentement vers une température uniformément égale à celle maintenue à $T_0$ à son extrémité $x = 0$.

☐ **1.** On cherche $T(x, t > 0)$ sous la forme $T_0 + f(x)g(t)$. Expliciter les équations différentielles vérifiées par $f$ et $g$ et les conditions aux limites pour $f$ et $g$.
☐ **2.** En déduire que $T(x, t > 0) = T_0 + \sum_{n>0} \theta_n \sin\left(n\pi\frac{x}{\ell}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)$ ; déterminer les suites $\tau_n$ et $\theta_n$.
☐ **3.** Évaluer la durée $\tau$ au bout de laquelle, en tout point de la barre, $T(x,\tau) - T_0 < \Delta T/100$.

### B.II– Diffusion thermique illimitée

Une barre de section $s$, de très grande longueur, calorifugée sur ses faces latérales, n'est soumise qu'à des transferts conductifs unidimensionnels. On note $\lambda$, $c$ et $\rho$ les valeurs constantes et uniformes de la conductivité thermique, de la capacité thermique et de la masse volumique de la barre. On pose $D = \lambda/\rho c$.
Au début de l'étude, la barre est à température uniforme $T_0$ ; on la chauffe alors de manière très localisée dans sa partie centrale $x \sim 0$, apportant l'énergie totale $\Delta U$. On cherche alors une solution au problème de la diffusion thermique sous la forme $T(x, t > 0) = T_0 + \frac{\alpha}{t^p} \exp\left(-\frac{x^2}{qDt}\right)$, $\alpha$, $p$ et $q$ étant des constantes.

☐ **1.** Déterminer $p$ et $q$. Comment évolue la vitesse de la diffusion thermique le long de la barre ?
☐ **2.** Exprimer $\alpha$ en fonction de $\Delta U$, $\rho$, $c$, $s$ et $D$.

---

**A.V** : $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\rho cv}{\lambda}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} - \frac{2\mathfrak{h}}{a}(T - T_0) = 0$. $v \ll \frac{\lambda}{\rho c}\sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{a}}$. $\ell \simeq \delta \ln \frac{T_c - T_0}{T_f - T_0}$. $d = \delta + \frac{\rho v a \mathscr{L}}{2\langle(T_f - T_0)\rangle}$.
**B.I** : $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = k^2 f(x)$, $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = -Dk^2 g(t)$. $\tau_n = \ell^2/n^2\pi^2 D$, $\theta_{2p} = 0$, $\theta_{2p+1} = 4\Delta T/(2p+1)\pi$. $\tau \sim 0,44\ell^2/D$.
**B.II** : $q = 4$, $p = 1/2$. $v \propto 1/\sqrt{t}$. $\alpha = \frac{\Delta U}{2\rho cs\sqrt{\pi D}}$.