SÉRIE D'EXERCICES Nº 4

Ce document comporte 2 pages.

SYSTÈMES EN ÉCOULEMENT

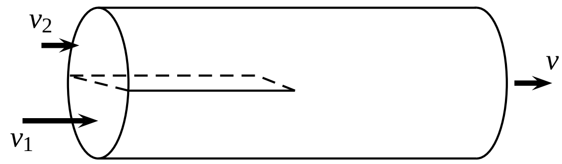
A : Écoulements de fluides

A.I– Compression d'un gaz

Une installation de compression d'azote (gaz parfait diatomique, capacité thermique massique $c_v = 742\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$ à volume constant) traverse N étages successifs de compression, constitués chacun d'un compresseur adiabatique (C) suivi d'un réfrigérant isobare (R) à circulation d'eau froide. À l'entrée, l'azote est pris à $p_e = 1$ bar, $T_e = 300$ K ; à la sortie du système, on souhaite atteindre $p_s = 100$ bar, $T_s = 400$ K.
L'eau liquide (capacité thermique massique $c_e = 4,19\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$) utilisée dans chacun des réfrigérants circule à pression constante $P^\circ = 1$ bar ; la température de l'eau à l'entrée de (R) est $T_i = 280$ K.
La température de l'azote ne doit, en aucun point du dispositif, dépasser $T_{\max} = 400$ K ; de plus, la température de l'eau de refroidissement ne doit pas dépasser $T'_{\max} = 350$ K en sortie des réfrigérants (R).

☐ **1.** Calculer la capacité thermique massique à pression constante de l'azote.
☐ **2.** Les compresseurs fonctionnent de manière réversible. Calculer la valeur minimale de N. Pour tenir compte des irréversibilités de fonctionnement des compresseurs, faut-il augmenter ou diminuer N ? Justifier.
☐ **3.** Calculer la valeur minimale du rapport $\mathscr{D}_{\text{eau}}/\mathscr{D}_{\text{azote}}$ des débits massiques.

A.II– Mélange de deux liquides



Un cylindre est divisé en deux compartiments dans lesquels s'écoule le même liquide incompressible (masse volumique ρ), d'énergie interne massique invariable u. Les vitesses d'entrée sont $v_1 = 2v_0$ et $v_2 = v_0$. Au delà d'une certaine section, les deux écoulements se mélangent. Loin en amont de cette zone de mélange, la pression dans le fluide est notée P_0 ; loin en aval après ce mélange, elle vaut P, et la vitesse d'écoulement est uniforme et vaut v.

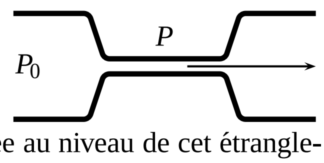
☐ **1.** Déterminer v en fonction de v_0.
☐ **2.** Déterminer P en fonction de P_0, ρ et v_0.

A.III– Régimes d'écoulement dans un canal

Pour l'eau liquide, on considérera que l'énergie interne massique u et la masse volumique ρ sont des constantes.
Un canal rectiligne de grande longueur à fond horizontal et de largeur ℓ contient de l'eau, en écoulement permanent sur une hauteur H. La vitesse de l'eau v est uniforme dans toute section droite du canal. Les quantités ℓ, H et v varient lentement le long du canal. On note g le champ de pesanteur, Q le débit volumique à travers une section droite du canal.

☐ **1.** Montrer l'existence de deux invariants, fonctions $f(v,\ell,H)$ qui restent constantes tout au long du canal.
☐ **2.** Montrer, pour ℓ fixé, l'existence d'un maximum $Q_{\max}$ du débit Q pour une certaine valeur de H.
☐ **3.** Pour $Q < Q_{\max}$, l'écoulement peut en général se faire en régime *fluvial* ou bien en régime *torrentiel*. Préciser. Comment, dans chaque cas, H varie-t-il si ℓ diminue progressivement ?

A.IV– Débimètre à gaz parfait

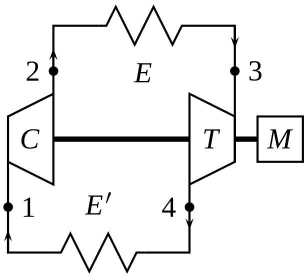


Un débimètre à gaz est constitué d'une canalisation de section S présentant un étranglement de section S/k, $k > 1$. L'écoulement est supposé adiabatique et réversible ; le rapport γ des capacités thermiques du gaz est constant. Une mesure de pression P est réalisée au niveau de cet étranglement. En amont (et en aval) de celui-ci, le gaz est pris aux conditions de pression P_0, température T_0. La masse molaire du gaz est M, la constante molaire des gaz parfaits est R.

A.I : $c_p = 1,04\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. $N \geqslant 5$: augmenter N si irréversible. $\mathscr{D}_{\text{eau}}/\mathscr{D}_{\text{azote}} \geqslant 0,64$.
A.II : $v = 3v_0/2$. $P = P_0 + 11\rho v_0^2/8$.
A.III : $Q = v\ell H$ et $H_0 = H + v^2/2g$. $Q = Q_{\max}$ pour $H = 2H_0/3$. Pour $H < 2/3H_0$, torrentiel, $H \nearrow$; pour $H > 2/3H_0$, fluvial, $H \searrow$.

☐ **1.** Exprimer trois relations liant la pression P, la masse volumique ρ et la vitesse v au niveau de l'étranglement aux grandeurs analogues P_0, ρ_0 et v_0 en amont de celui-ci.
☐ **2.** En déduire une expression du débit massique de gaz, en fonction de P_0, T_0, M, R, γ, k et $\alpha = P/P_0$.

B : Machines thermiques



B.I– Pompe à chaleur

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M ; on donne $c_p = 1\,000\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, $r = R/M = 287\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. Il parcourt le cycle d'une pompe à chaleur comportant un turbocompresseur C, un échangeur E qui assure la production thermique, une turbine T et un échangeur E' qui extrait la chaleur d'une source ambiante.
E et E' sont isobares ; $P_1 = 1$ bar. C et T sont calorifugés et montés sur le même arbre, entraîné par un moteur M. L'air sort de E' à 280 K, entre dans E à 375 K et en sort à 325 K. On néglige tous les frottements.

☐ **1.** Calculer la pression P, la température T et l'entropie s en chaque point du cycle. On prendra $s = 0$ pour $T = T_0 = 273$ K, $P = P_0 = 1$ bar.
☐ **2.** Calculer les travaux massiques utiles $w_{u,1\to2}$, $w_{u,3\to4}$, le transfert thermique massique reçu du milieu extérieur $q_{e,2\to3}$ et le travail fourni par le moteur par kilogramme de fluide w_M.
☐ **3.** Calculer le coefficient de performance COP de la pompe à chaleur.

B.II– Machine à vapeur

1 kg d'eau sous deux phases liquide et vapeur décrit un cycle $ABCD$; BC et DA sont adiabatiques et réversibles ; AB et CD sont isothermes, isobares, sans pièces mobiles. On note x la fraction massique en vapeur. Les données concernant le cycle sont résumées dans le tableau ci-contre. On donne les extraits suivants des tables thermodynamiques de l'eau :

	A	B	C	D
p en bar	20	20	1	1
T en K	485	485	373	373
x	0	1		

		Liquide juste saturé, $x_V = 0$			Vapeur saturante sèche, $x_V = 1$		
T	p	v_L	h_L	s_L	v_V	h_V	s_V
K	bar	$\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$	$\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$	$\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$	$\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$	$\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$	$\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$
485	20	$1{,}18\times10^{-3}$	909	$2{,}45$	$0{,}0998$	2 801	$6{,}35$
373	1	$1{,}04\times10^{-3}$	418	$1{,}30$	$1{,}70$	2 676	$7{,}36$

☐ **1.** Compléter le tableau ci-dessus : valeurs de x, volumes v, enthalpies h et énergies internes u massiques.
☐ **2.** Calculer le travail *total* et le travail *utile total* ; commenter.
☐ **3.** Calculer l'efficacité e de la machine ; comparer à un moteur de Carnot entre 485 K et 373 K.

A.IV : $\rho v = \rho_0 v_0 k$; $\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2}$; $P\rho^{-\gamma} = P_0\rho_0^{-\gamma}$. $\mathscr{D}_m = P_0 S\sqrt{\frac{2\gamma M}{(\gamma-1)RT_0}\frac{\alpha^{1-1/\gamma}-1}{1-\alpha^{2/\gamma}/k^2}}$.

B.I : $s_1 = s_2 = 25{,}3\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$; $P_2 = 2{,}77$ bar ; $s_3 = s_4 = -118\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$; $T_4 = 243$ K. $w_{u,1\to2} = 95\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$, $w_{u,3\to4} = -82\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$, $q_{e,2\to3} = -50\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$, $w_M = 13\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$. COP $= 3{,}85$.

B.II : $x_C = 0{,}82$; $x_D = 0{,}18$; $v_C = 1{,}39\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$; $v_D = 0{,}31\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}}$. $h_C = 2\,270\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$; $h_D = 824\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$. $u_A = 907\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$; $u_B = 2601\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$; $u_C = 2\,131\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$; $u_D = 815\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$. $w \simeq w_u = -46\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ car $\sum_{\text{cycle}} p\Delta v = 0$. $e = w/q_{AB} = 0{,}24 \simeq e_{\text{Carnot}}$.