

SÉRIE D'EXERCICES N° 3

Ce document comporte 2 pages.

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES

A : Systèmes de points matériels

A.I– Modèle moléculaire

Une molécule diatomique est modélisée par deux points matériels de masses m_1 et m_2 distants de r , interagissant exclusivement par l'intermédiaire de l'énergie potentielle $E_p = -K \left(\frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{\ell^3}{3r^3} \right)$.

On note σ le moment cinétique de la molécule dans son référentiel barycentrique.

- 1. Déterminer la distance interatomique d'équilibre r_0 .
- 2. Expliciter la pulsation ω_ℓ des petites oscillations longitudinales de la molécule.

A.II– Interaction élastique

Deux particules ponctuelles de même masse m sont reliées par un ressort de raideur k , de longueur à vide et de masse négligeable. L'ensemble, qui forme un système isolé, est étudié dans son référentiel barycentrique. L'origine des énergies potentielles sera prise à distance nulle des deux masses.

Le système est en mouvement caractérisé par le moment cinétique σ et par l'énergie mécanique totale E .

- 1. Quelle est la période du mouvement de chacune des deux masses ?
- 2. Quelle est la nature de la trajectoire de chacune des deux masses ?

A.III– Explosion d'une étoile binaire

Une étoile binaire est formé d'une étoile légère E_1 (masse m) et d'une autre E_2 plus massive (masse $4m$) en mouvements circulaires, la distance des deux étoiles étant notée R . Leur interaction est purement gravitationnelle, caractérisée par la constante universelle \mathcal{G} .

- 1. Calculer la vitesse de chacune des deux étoiles.

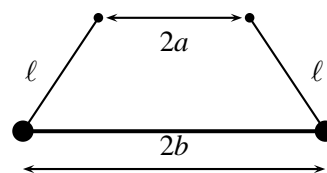
À un instant donné, l'étoile massive explose instantanément, expulsant dans l'espace les trois quarts de sa masse ; le système restant est donc formé de deux étoiles de même masse m dont on admet qu'elles ont à cet instant la même vitesse qu'avant l'explosion. Déterminer, après cette dernière :

- 2. les propriétés du nouveau référentiel barycentrique ;
- 3. les mouvements des deux étoiles dans ce référentiel.

A.IV– Pendule de torsion

Deux particules matérielles de masse identique m sont reliées par une barre sans masse de longueur $2b$. Cette masse reste horizontale dans toute la suite.

Les deux particules sont reliées par deux fils inextensibles et sans masse, de même longueur ℓ , à deux points fixes distants de $2a < 2b$. On suppose $\ell > b - a$ et on pose $h = \sqrt{\ell^2 - (b - a)^2}$.



On ne considère que des mouvements de rotation de la barre, son centre G se déplaçant sur une verticale passant par sa position initiale G_0 . Le vecteur instantané de rotation de la barre est noté $\omega = \dot{\theta}$ et on se limite aux petits mouvements.

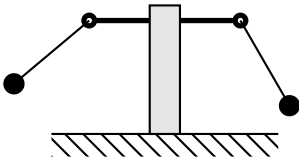
- 1. Montrer, au premier ordre non nul, que l'énergie cinétique du système est identique à son énergie cinétique barycentrique.
- 2. En déduire la période des petits mouvements d'oscillation de la barre.

A.I : $r_0 = \frac{\ell}{1 - \sigma^2 / K \ell^2 \mu}$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. $\omega_\ell^2 = K(1 - \sigma^2 / K \mu \ell^2)^5 / \mu \ell^2$.

A.II : $T = \pi \sqrt{2m/k}$. Les deux masses parcourent la même ellipse, de demi-axes $\sqrt{\frac{E}{4k} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\sigma^2 k / m E^2} \right)}$.

A.III : $v_1 = 4v_2$, $v_2 = \sqrt{\mathcal{G}m/5R}$. Mouvement uniforme, $v_G = 3v_2/2$. Hyperboles identiques, $p = 5R/2$, $e = 2\sqrt{2}$.

A.IV : $mv_G^2 = ma^2 b^2 \theta^2 \dot{\theta}^2 / h \ll E_c^* = mb^2 \dot{\theta}^2$. $T = 2\pi \sqrt{hb/ga}$.



A.V- Couplage inertiel

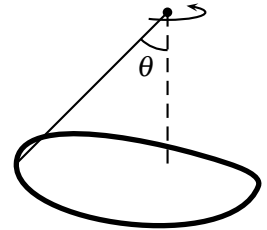
Deux pendules simples (longueurs l_1 et l_2 , masses m_1 et m_2) sont fixés sur un même support, de masse M , qui peut glisser sans aucun frottement sur le sol horizontal. On note g l'accélération de la pesanteur et on se limite à l'étude des oscillations de faible amplitude ; les angles d'écart des pendules par rapport à la verticale sont notés θ_1 et θ_2 .

- 1. Écrire les équations du mouvement pour les variables θ_1, θ_2 et x (déplacement du centre de masse du support).
- 2. On se place dans le cas où $l_1 = l_2 = l, m_1 = m_2 = m$ et on abandonne le système sans vitesse initiale à partir d'une situation où $\theta_{10} = \theta_0, \theta_{20} = 0$. Déterminer son évolution ultérieure.

B : Systèmes étendus

B.I- Chaîne entraînée en rotation

Une chaîne fermée de masse m est reliée par un fil à l'extrémité de l'axe d'une centrifugeuse, qui tourne à la vitesse angulaire ω , le fil faisant l'angle constant θ avec la verticale. On note g l'accélération de la pesanteur.



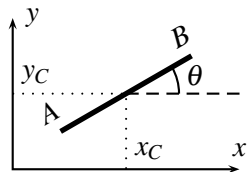
- 1. À quelle distance de l'axe de rotation se trouve le centre de masse de la chaîne ?
- 2. Quelle est la tension du fil ?

B.II- Anneau frottant dans l'eau

Un anneau circulaire fin et homogène, de masse m et de rayon a , tombe dans l'eau. Il subit le champ de pesanteur terrestre (accélération g) et des forces de frottement. La force exercée sur un élément d'anneau de longueur $d\ell$ et de vitesse \vec{v} s'écrit $d\vec{F} = -kd\ell\vec{v}$.

À l'instant initial, le centre de masse G de l'anneau est de vitesse nulle, l'anneau est situé dans un plan horizontal et son vecteur instantané de rotation est de direction horizontale et de norme ω_0 .

- 1. Déterminer l'évolution de la vitesse de G .
- 2. Déterminer l'évolution du vecteur instantané de rotation de l'anneau.



B.III- Barre mobile

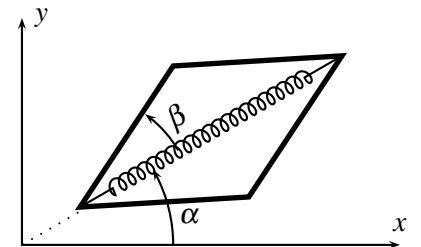
Une barre homogène AB , de centre C , de masse m et de longueur ℓ , se déplace dans le plan (Oxy) . On note (x_C, y_C) les coordonnées de C et θ l'angle de AB avec (Ox) .

- 1. Exprimer le moment cinétique de la barre en C , relativement au référentiel (Oxy) .
- 2. Exprimer l'énergie cinétique de la barre, relativement au référentiel (Oxy) .

B.IV- Losange articulé

Un losange est formé de quatre barres identiques, de masse m et de longueur ℓ (cf. exercice III) articulées sans aucun frottement. Les barres glissent sans frottement sur le plan horizontal (Oxy) .

Deux des extrémités du losange sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide $\ell_0 = \ell\sqrt{2}$, de sorte que la forme en carré ($\beta = \pi/4$) corresponde à un ressort non étiré.



- 1. Quel est le mouvement du centre de masse G du système ?
- 2. Exprimer le théorème du moment cinétique en G pour le système complet. Conclure.
- 3. Exprimer le théorème de l'énergie cinétique pour le système complet. Conclure, pour l'étude des petites oscillations.

A.V : $l_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{x} = -g\theta_1$, id. avec $1 \leftrightarrow 2, (M + m_1 + m_2)\ddot{x} + m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 = 0. \theta_1 = \frac{\theta_0}{2} (\cos \Omega t + \cos \omega t), \theta_2 = \frac{\theta_0}{2} (\cos \Omega t - \cos \omega t)$, avec $\omega = \sqrt{g/\ell}, \Omega = \omega \sqrt{1 + 2m/M}; x = \frac{m\ell\theta_0}{1+2m} (1 - \cos \omega t)$.

B.I : $g \tan \theta / \omega^2; mg / \cos \theta$.

B.II : $\vec{v}_G = \vec{v}_\infty (1 - \exp(-t/\tau)), \tau = m/2\pi ak, \vec{v}_\infty = \vec{g}\tau. \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 \exp(-t/\tau)$.

B.III : $\vec{\sigma}_C = \frac{1}{12} m \ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z, E_c = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \frac{\ell^2}{12} \dot{\theta}^2)$.

B.IV : Rectiligne uniforme. $\vec{\sigma}^* = \frac{4}{3} m \ell^2 \dot{\alpha} \vec{e}_z$ donc $\dot{\alpha} = \text{cte}. E_c^* = \frac{2}{3} m \ell^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)$ et $E_p = 2k\ell^2 (\cos \beta - \cos \frac{\pi}{4})^2$ donc $\omega = \sqrt{3k/2m}$.