

SOLUTIONS PROPOSÉES POUR LE DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 8

Ce document comporte 4 pages.

ÉLECTRONIQUE – RAYONNEMENT THERMIQUE

Problème I : Étude d'un module de radionavigation

d'après Centrale-Supélec (MP) 2006

I-A : Mesure d'altitude

I-A-1 : Génération du signal d'émission

□ 1. $e_2(t) = -A_0 \cos(2\pi f_0 t)$ (après déphasage de $-\pi/2$);

$e_3(t) = k k_0 M(t) A_0 \sin(2\pi f_0 t)$ (après multiplication des si-

gnaux); $e(t) = A_0 [k k_0 M(t) \sin(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_0 t)]$ (en

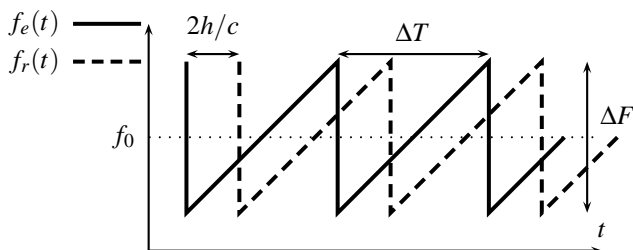
sortie du soustracteur).

□ 2. $e(t) = u A_0 [\cos(2\pi f_0 t) \cos \phi + \sin(2\pi f_0 t) \sin \phi]$ où

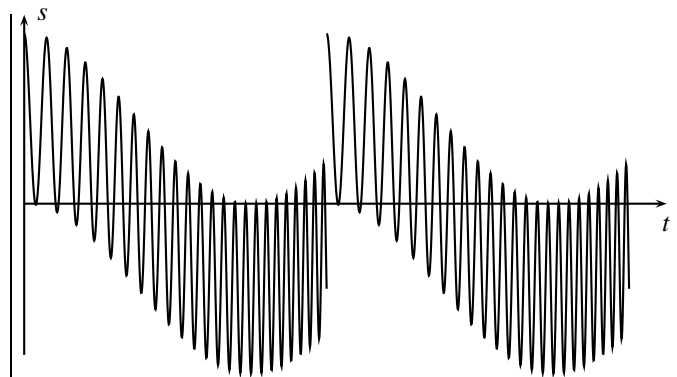
on a posé $u = \sqrt{1 + k^2 k_0^2 M^2(t)}$ et $\sin \phi = \frac{k k_0 M(t)}{u}$; si on se contente d'un DL1, $u = 1$ et $\sin \phi = \phi$ donc on retrouve bien l'expression proposée par l'énoncé avec $\phi(t) = k k_0 M(t)$.

I-A-2 : Mesure de l'altitude

□ 3. $\theta_r(t) = \theta_e(t - \frac{2h}{c})$ du fait de la propagation de l'onde à la vitesse c donc $f_r(t) = f_e(t - \frac{2h}{c})$, deux courbes identiques mais décalées de $2h/c$.



□ 4. Par intégration, $e(t) = A_e \cos 2\pi[(f_0 - \frac{\Delta F}{2})t + \frac{\Delta F}{2\Delta T}t^2]$ (émis) et $r(t) = A_r \cos 2\pi[(f_0 - \frac{\Delta F}{2} - \frac{2h\Delta F}{c\Delta T})t + \frac{\Delta F}{2\Delta T}t^2]$ (reçu). À la sortie du multiplieur, on obtient le produit $s(t)$ des deux fonctions, avec essentiellement deux fréquences, $f_0 - \frac{\Delta F}{2}$ et $f_0 - \frac{\Delta F}{2} - \frac{2h\Delta F}{c\Delta T}$, sans oublier que pendant la durée ΔT la fréquence augmente à cause du terme quadratique en t ; on a donc pour allure du signal de sortie le tracé ci-après :



□ 5. Le produit de deux fonctions cosinus génère la demi-somme de $\cos \frac{\theta_e(t) + \theta_r(t)}{2}$ et de $\cos \frac{\theta_e(t) - \theta_r(t)}{2}$. Le terme de basse fréquence (enveloppe) correspond à la différence des phases; à la sortie du filtre passe-bas, $s'(t) = \frac{A_e A_0 G_0}{2} \cos 2\pi \frac{h\Delta F}{c\Delta T} t$. La

fréquence est proportionnelle à l'altitude h . L'hypothèse (H1) n'est pas nécessaire car le produit se fera avec un décalage de n périodes mais donnera toujours un terme de basse fréquence de la même forme.

□ 6. On peut proposer une cellule RC de fonction de transfert $H = \frac{1}{1 + jRC\omega}$. Pour s'assurer d'un bon fonctionnement, il faut que $\frac{h\Delta F}{c\Delta T} \ll \frac{1}{2\pi RC} \ll f_0$.

□ 7. Le système est basé sur une mesure de fréquence donc il ne dépend pas de l'amplitude du signal reçu. Toutefois, la dispersion des ondes par l'atmosphère (traversée du milieu à fréquence donc à vitesse de phase variable) peut dégrader la précision de la mesure.

I-B : Mesure de vitesse

I-B-1 : Étude de l'effet Doppler

□ 8. On peut citer le décalage vers l'aigu puis le grave des sons émis par un véhicule qui s'approche puis s'éloigne d'un observateur, ou le même décalage vers le rouge pour la lumière provenant des étoiles ou galaxies du fait de l'expansion universelle.

□ 9. L'invariance de la force de Lorentz impose $q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}') = q'(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$ où la charge électrique $q = q'$ est un invariant, et où $\vec{v}' = \vec{v}' + \vec{v}_0$; on doit donc avoir, pour toute vitesse \vec{v} , $\vec{E}' + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}' - \vec{E}' = \vec{v} \wedge (\vec{B}' - \vec{B})$ donc $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ et

$\vec{B}' = \vec{B}$.

□ 10. Pour une onde plane progressive, $\vec{B}_i = \frac{1}{c} \vec{v}_i \wedge \vec{E}_i$ donc $\vec{B}_i = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega_i [t - \frac{x}{c}]) \vec{e}_y$. La relation établie ci-dessus impose

pose $\vec{E}'_i = E_0 (1 - \frac{v_0}{c}) \cos(\omega_i [t - \frac{x}{c}]) \vec{e}_z$. Remarquons que la

relation de changement de référentiel $x = x' + v_0 t$ permet aussi

d'écrire $\vec{E}'_i = E_0 (1 - \frac{v_0}{c}) \cos(\omega_i [t \{1 - \frac{v_0}{c}\} - \frac{x'}{c}]) \vec{e}_z$: le

champ incident parvient sur la plaque à la pulsation $\omega_i \{1 - \frac{v_0}{c}\}$ et se propage à la vitesse de phase relative $c' = c - v_0$: on retrouve la relation classique de composition des vitesses.

Dans le plan $x = v_0 t$ du miroir, le champ électrique total est tangentiel donc nul (miroir parfait) ce qui impose dans ce plan la relation $\vec{E}'_r(x' = 0) = -E_0 (1 - \frac{v_0}{c}) \cos(\omega_i \{1 - \frac{v_0}{c}\} t) \vec{e}_z$; le champ réfléchi se propage alors dans le vide à la vitesse $-c \vec{e}_x$

donc $\vec{E}'_r = -E_0 (1 - \frac{v_0}{c}) \cos(\omega_i \{1 - \frac{v_0}{c}\} [t + \frac{x'}{c}]) \vec{e}_z$. Il est

encore possible d'écrire ce même champ sous la forme $\vec{E}'_r = -E_0 (1 - \frac{v_0}{c}) \cos(\omega_i \{1 - \frac{v_0}{c}\} [t \{1 - \frac{v_0}{c}\} + \frac{x'}{c}]) \vec{e}_z$ ou, sous la forme $\vec{E}'_r = -E_0 (1 - \frac{v_0}{c}) \cos(\omega_i \{1 - \frac{v_0}{c}\}^2 [t + \frac{x'}{c - v_0}]) \vec{e}_z$, on reconnaît une onde se propageant vers la gauche à la vitesse $c - v_0$, ayant subi deux fois de suite un abaissement de fréquence d'un facteur $1 - \frac{v_0}{c}$.

□ 11. On a vu que $f_r = f_i (1 - \frac{v_0^2}{c^2})$. Avec $\theta_e = \theta_r = 0$,

$v_e = 0$ et $v_r = v_0$, le récepteur reçoit une onde de fréquence $f_1 = f_i (1 - \frac{v_0}{c})$ puis renvoie vers celui-ci une onde de fréquence $f_r = f_1 (1 - \frac{v_0}{c})$ et le résultat est identique à celui proposé par l'énoncé.

□ 12. Il n'y a pas de conservation de l'énergie dans R , mais seulement dans R' . En effet, dans R , le miroir se déplace et le générateur de l'onde incidente doit « remplir » un domaine croissant d'énergie électromagnétique $\epsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$.

I-B-2 : Mesure de la pseudovitesse

□ 13. On peut écrire $s_r(t) = a_r \cos(\omega_r t + \varphi)$, $s_{OL}(t) = a_{OL} \cos(\omega_{OL} t)$ donc le signal obtenu à la sortie du multiplicateur est $s_m(t) = k s_r(t) s_{OL}(t)$ qu'on peut écrire $s_m(t) = \frac{k a_r a_{OL}}{2} [\cos(\omega_r t + \omega_{OL} t + \varphi) + \cos(\omega_r t - \omega_{OL} t + \varphi)]$; la composante de plus basse fréquence de ce produit est le terme de fréquence $|f_r - f_{OL}|$ soit $f_b = |f_e (1 - \frac{v_e}{c}) - f_{OL}|$.

□ 14. $|V_r| = c \frac{f_b}{f_e}$; pour le calcul des incertitudes, on devra considérer l'expression

$$V_r = c \frac{f_e - f_{OL} \pm f_b}{f_e} \text{ donc } dV_r =$$

$\frac{c}{f_e^2} (f_e [df_e - df_{OL} \pm df_b] - df_e [f_e - f_{OL} \pm f_b])$ qu'on écrira aussi $dV_r = \frac{c}{f_e} (df_e [1 - \frac{V_e}{c}] - df_{OL} \mp df_b)$. L'incertitude étant un majorant de l'écart entre valeur vraie et valeur mesurée, et compte tenu de l'approximation proposée par l'énoncé, on aura $\Delta V_r = \frac{c}{f_e} (\Delta f_e + \Delta f_{OL})$ puisque $\Delta f_b = 0$.

□ 15. On ne peut pas obtenir le signe de V_r puisque un changement de signe de V_r se traduit seulement par un déphasage de π du signal mesuré.

I-B-3 : Mesure de la vitesse vraie

□ 16. Avec deux effets Doppler cumulés à l'aller et au retour, $|V_r| = \frac{c}{2} \frac{f_b}{f_e}$. On a donc aussi $dV_r = \pm \frac{c}{2} \frac{df_e df_b - f_b df_e}{f_e^2}$ donc

$$\Delta V_r = \frac{c}{2} \frac{f_b \Delta f_e}{f_e^2}$$

□ 17. La stabilité de la fréquence de l'oscillateur doit être assurée pour des durées au moins égales au temps d'aller-et-retour du signal jusqu'au satellite.

□ 18. La mesure de la vitesse transverse peut être obtenue par une mesure de la direction apparente du satellite, donc par une mesure d'angle de visée, cf. plus loin.

I-C : Mesure d'angles

□ 19. $s_i(t) = A_e \cos(2\pi f_e [t - \frac{D_i}{c}])$ pour $i = 1, 2$. On en

déduit $\Delta\phi = \frac{2\pi f_e}{c} \Delta D$ où on peut écrire $\vec{SA}_2 = \vec{A}_1 \vec{A}_2 - \vec{A}_1 \vec{S}$

donc $D_2^2 = a^2 + D_1^2 - 2D_1 a \cos \alpha$; en écrivant $D_2 = D_1 - \Delta D$ et en développant l'expression précédente au premier ordre en ΔD , il vient (interférences dans les conditions de Fraunhofer) $\Delta D = a \cos \alpha$ donc $\cos \alpha = \frac{c}{2\pi f_e a} \Delta\phi$.

□ 20. Recherche des franges claires ($\Delta\phi = 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$) ou des franges sombres, ou encore détermination de l'interfrange $\Delta a = \frac{c}{f_e \cos \alpha}$; on peut par exemple proposer un

système d'Young, mais dans le système d'Young, la différence de marche correspond à un même point d'observation pour deux sources décalées, au contraire de ce qui est réalisé ici.

□ 21. On ne mesure que $\cos \alpha$, il faut donc une levée d'ambiguïté sur le signe de α ; de plus, la mesure d'une direction exige la connaissance de deux angles, donc la présence de trois points de mesure au sol.

Problème II : La surface de la Lune

d'après Mines–Ponts (MP) 2003

II-A : Températures de surface

II-A-1 : Température terrestre

□ 22. D'après la loi de Stefan, $P_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$. La Terre ne reçoit que la puissance émise dans l'angle solide sous lequel on la voit depuis le Soleil, soit $P_0 = P_S \frac{1}{4\pi} \frac{\pi R_T^2}{D_{ST}^2}$ donc

$$P_0 = \frac{\pi R_T^2}{D_{ST}^2} R_S^2 \sigma T_S^4. \text{ De plus, la Terre étant à l'équilibre ther-}$$

modynamique, on a $P_0 = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$, d'où $T_T = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2D_{ST}}}$.

□ 23. On a maintenant $(1 - A_T)P_0 = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$; en remplaçant P_0 par son expression, on en déduit

$$T_T^4 = (1 - A_T) T_S^4 \left(\frac{R_S}{2D_{ST}} \right)^2.$$

□ 24. $T_T = 252 \text{ K} = -21^\circ \text{C}$; cette valeur est nettement inférieure à la moyenne effectivement observée au sol et il existe donc un processus réchauffant la Terre : c'est l'effet de serre.

□ 25. Le Soleil et la Terre émettent dans des domaines spectraux différents (autour de $0,5 \mu\text{m}$ pour le rayonnement visible du Soleil, autour de $10 \mu\text{m}$ pour le rayonnement infrarouge de la Terre).

□ 26. L'ensemble Terre-atmosphère absorbe la puissance $(1 - A_T)P_0$, dont la fraction $\alpha(1 - A_T)P_0$ est absorbé par l'atmosphère. La surface terrestre absorbe donc le reste, à savoir $P_1 = (1 - \alpha)(1 - A_T)P_0$ ou $P_1 = 4(1 - \alpha)\pi R_T^2 \sigma T_T^4$.

La moitié de l'énergie rayonnée par l'atmosphère l'est en direction de la Terre où elle est totalement absorbée, $P_2 = \frac{1}{2}P_a$ soit $P_2 = 4\pi R_T^2 \sigma T_a^4$. Un bilan thermique pour l'at-

mosphère donne $P_a = \alpha(1 - A_T)P_0 + P_T$ où P_T est le rayonnement émis par la Terre. En remplaçant P_a , P_0 et P_T par leurs expressions en fonction des températures, on obtient $T_a^4 = \frac{1}{2}(\alpha T_T^4 + T_T^4)$. Enfin, un bilan thermique sur la Terre donne $P_1 + P_2 = P_T$, soit $4(1 - \alpha)\pi R_T^2 \sigma T_T^4 + 4\pi R_T^2 \sigma T_a^4 = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$. En utilisant l'expression de T_a obtenue précédemment, on obtient $T_T^4 = (2 - \alpha)T_T^4$.

□ 27. $T_T' = 285 \text{ K} = 12^\circ \text{C}$, $T_a = 252 \text{ K} = -21^\circ \text{C}$. La

valeur précédemment trouvée se retrouve au niveau de l'atmosphère (le bilan global reste le même) mais la température au sol est plus élevée.

II-A-2 : Température lunaire

□ 28. On procède comme ci-dessus en assimilant les distances Soleil-Lune et Soleil-Terre donc

$$T_{L,\text{Soleil}}^4 = (1 - A_L) T_S^4 \left(\frac{R_S}{2D_{ST}} \right)^2, \quad T_{L,\text{Soleil}} = 275 \text{ K} = 2^\circ \text{C}.$$

□ 29. La zone de températures les plus élevées est la zone de la Lune pour laquelle les rayons solaires arrivent

perpendiculairement à la surface (Soleil à midi local). En écrivant que le flux émis par une surface élémentaire d^2S de la zone définie précédemment est égal au flux reçu du Soleil, on obtient $d^2S \sigma T_{L,\text{max}}^4 = (1 - A_L) \frac{1}{4\pi} \frac{d^2S}{D_{ST}^2} 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$ soit

$$T_{L,\text{max}}^4 = (1 - A_L) T_S^4 \left(\frac{R_S}{D_{ST}} \right)^2 = 4T_{L,\text{Soleil}}^4; \text{ numériquement,}$$

$$T_{L,\text{max}} = 389 \text{ K} = 116^\circ \text{C} : \text{ le modèle est ici bien conforme}$$

à la réalité.

□ 30. On évaluera ces puissances surfaciques dans des zones où les rayonnements « solaire » et « atmosphérique » arrivent en incidence quasi-normale sur la surface de la Lune. Pour l'atmosphère terrestre, $j_A = \frac{1}{D_{LT}} R_T^2 \sigma T_a^4 (1 - A_L)$. Pour le

rayonnement solaire, la Terre réfléchit $A_T P_0 = \frac{\pi A_T R_T^2}{D_{ST}^2} R_S^2 \sigma T_S^4$; on suppose que ce rayonnement est renvoyé de façon isotrope dans un demi-espace. La fraction arrivant sur une surface élémentaire d^2S de la Lune est donc proportionnelle à l'angle solide sous lequel on voit cette surface depuis la Terre divisé par 2π , soit $d^2P = (1 - A_L) A_T P_0 \frac{d^2S}{D_{LT}^2} \frac{1}{2\pi}$ et on a fina-

lement $j_S = (1 - A_L) A_T \frac{R_T^2 R_S^2}{2D_{ST}^2 D_{LT}} \sigma T_S^4$. Les deux contribu-

tions sont comparables puisque $j_A = 9,6 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ et

$$j_S = 6,3 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

□ 31. Un bilan thermique pour une surface élémentaire donne $T_{L,\text{Terre}}^4 = \frac{j_A + j_S}{\sigma}$ donc $T_{L,\text{Terre}} = 41 \text{ SI}$, très éloigné

des valeurs mesurées, de l'ordre de 120 K . La modification pour la température de M' serait négligeable; en effet, la puissance surfacique du rayonnement solaire direct sur le sol lunaire vaut $j = (1 - A_L) \frac{R_S^2}{D_{ST}^2} \sigma T_S^4 = 1,3 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

□ 32. Les longueurs d'onde du visible se situent entre $0,40 \mu\text{m}$ et $0,75 \mu\text{m}$; celles de l'infrarouge au-delà jusqu'à quelques centaines de micromètres. Si on prend comme température de la Lune la température moyenne calculée ci-dessus, $T_{L,\text{Soleil}} = 275 \text{ K}$, la loi de Wien donne un maximum de rayonnement aux alentours de $10 \mu\text{m}$, ce qui correspond à l'infrarouge. Le clair de Lune est dû au rayonnement solaire (dans le domaine visible essentiellement donc) réfléchi par la Lune.

II-B : Le sol lunaire

□ 33. C'est un empilement hexagonal compact. La distance entre les projections horizontales des points A et B est donc $x = \frac{2R_{\text{Sll}}}{\sqrt{3}}$ (du centre aux sommets d'un triangle équilatéral de côté $2R_{\text{Sll}}$) et la distance verticale y entre le plan des atomes A et B vérifie donc $x^2 + y^2 = 4R_{\text{Sll}}^2$ donc $y = 2\sqrt{\frac{2}{3}}R_{\text{Sll}}$. Comme enfin $c = 2y$, on retrouve bien $c = 4\sqrt{\frac{2}{3}}R_{\text{Sll}}$.

□ 34. La Lune ne possède pas d'atmosphère, donc il n'y a pas d'échange par convection. D'autre part, les contacts étant supposés ponctuels, les surfaces en contact sont nulles, ce qui empêche les échanges par conduction. Les échanges thermiques entre sphères sont donc limités au rayonnement.

□ 35. Les sphères étant jointives, le rayonnement émis par une couche de l'empilement est presque totalement absorbé par les couches adjacentes, ce qui justifie l'opacité des plans du modèle. Soient alors T et $T + \Delta T$ les températures de deux plans adjacents. La densité de flux thermique entre les deux plans est $j_Q = \sigma T^4 - \sigma(T + \Delta T)^4$; un développement limité donne $j_Q = -4\sigma T^3 \Delta T$. Pour un transfert conductif, on aurait $J_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \simeq -\lambda \frac{2\Delta T}{c}$. En identifiant les deux expressions de J_Q et en remplaçant c par son expression en fonc-

tion de R_{Sil} , on obtient la conductivité thermique équivalente

$$\lambda = 8\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma R_{Sil} T^3 \quad (n = 3).$$

□ 36. $\lambda(T) = 7,7 \times 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ pour $T = 275 \text{ K}$;

on a donc $\lambda(T) \ll K_{Sil}$, les silicates massifs sont le siège d'un vrai transfert conductif, plus performant que le transfert radiatif.

□ 37. Les sphères de silicates occupent 74% du volume total donc on suppose $d = 0,74d_{Sil}$. La capacité thermique est une grandeur intensive, non affectée par la dispersion spatiale du matériau et on peut donc supposer $c = c_{Sil}$.