

SOLUTIONS PROPOSÉES POUR LE DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 6

Ce document comporte 2 pages.

ONDES ET OPTIQUE

Problème I : Ondes guidées en surface

d'après Mines-Ponts (MP) 2000

I-A : Milieux conducteurs

□ 1. $\vec{j} = \sum \rho_i \vec{v}_i \neq \vec{0}$ en présence de plusieurs types de charges est parfaitement compatible avec $\rho = \sum \rho_i = 0$.

□ 2. $\text{div} \vec{B} = 0$, $\text{div} \vec{E} = 0$ dans ce milieu neutre,

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ et } \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

□ 3. $\|\vec{j}\| \gg \epsilon_0 \|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|$ sous réserve que $\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0}$ donc,

dans le cas du cuivre, $f \ll 10^{18}$ Hz et, dans le cas du

silicium, $f \ll 5 \times 10^6$ Hz. Pour des ondes de fréquence

inférieure à 1 GHz, seul le cuivre peut être considéré comme un bon conducteur.

□ 4. $\text{rot} \text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu_0 \gamma \vec{E}$ ou $\Delta \vec{E} = \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 \vec{E}$.

□ 5. Avec $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$, la solution de l'équation linéaire ci-dessus est combinaison linéaire de deux termes, $\exp(i\omega t) \exp(\pm(1+i)x/\delta)$ et la seule solution non divergente quand $x \rightarrow \infty$ est celle de l'énoncé. δ est l'épaisseur de peau, avec pour le cuivre à 1 MHz $\delta = 67 \mu\text{m}$: l'onde ne pénètre dans le métal que sur une épaisseur très faible.

□ 6. L'approximation des conducteurs parfaits correspond à $\gamma \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$: le champ électrique est nul dans le métal et les courants y sont seulement surfaciques.

I-B : Ondes de surface

□ 7. $E_{0x} = \frac{k}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0 \omega} B_0, E_{0y} = 0$ et $E_{0z} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0 i \omega} \frac{dB_0}{dx}$ dans

II, et $E_{0x} = \frac{k}{\epsilon_0 \mu_0 \omega} B_0, E_{0y} = 0$ et $E_{0z} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 i \omega} \frac{dB_0}{dx}$ dans I.

□ 8. Avec Maxwell-Faraday, $-i\omega B_0 = -ikE_{0x} - \frac{dE_{0z}}{dx}$ donc,

dans le milieu II, $\frac{d^2 B_0}{dx^2} = (k^2 - \epsilon_r \omega^2 / c^2) B_0$ et dans le vide I,

$$\frac{d^2 B_0}{dx^2} = (k^2 - \omega^2 / c^2) B_0.$$

□ 9. Il faut $\alpha^2 = k^2 - \omega^2 / c^2$, $\beta^2 = \epsilon_r \omega^2 / c^2 - k^2$ ce qui

impose $\epsilon_r \frac{\omega}{c} > k > \frac{\omega}{c}$ et $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_r - 1)$.

□ 10. Au lieu d'avoir guidage par deux réflexions sur des métaux parfaits, la réflexion sur l'interface I-II correspond au phénomène de réflexion totale décrit en optique.

I-C : Relations de passage et modes (...)

□ 11. Continuité de la composante tangentielle de \vec{B} .

□ 12. Continuité de la composante tangentielle de \vec{E} d'où

$\varphi = 0$, éventuellement à π près, correspondant aux deux

signes possibles de B_{II} .

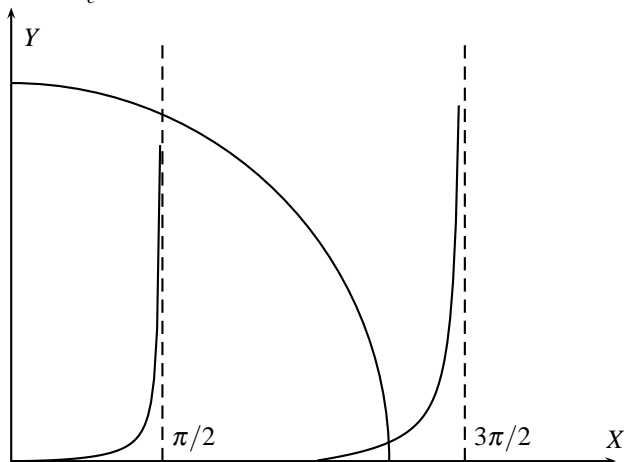
□ 13. Pour la composante tangentielle de \vec{B} , on obtient $B_I \exp(-\alpha a) = B_{II} \cos(\beta a)$; la composante tangentielle de

\vec{E} fournit $\alpha B_I \exp(-\alpha a) = \frac{\beta}{\epsilon_r} B_{II} \sin(\beta a)$.

□ 14. Il faut interdire les cas $\beta a \equiv 0[\pi/2]$.

□ 15. Il suffit de considérer que $B_I \neq 0$ et $B_{II} \neq 0$.

□ 16. Le système des deux équations $Y = \frac{X \tan(X)}{\epsilon_r}, X^2 + Y^2 = R^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} (\epsilon_r - 1)$ est décrit dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$:



Les intersections sont en nombre fini n , avec $X_n \leq \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi$

donc $n = 1 + E\left(\frac{\omega a}{c\pi} \sqrt{\epsilon_r - 1} - \frac{1}{2}\right)$.

□ 17. À la limite $k = 0$ pour le mode n , $\omega_n = \frac{c\pi}{\epsilon_r a} \left(n + \frac{1}{2}\right)$ à

comparer au guide à parois métalliques, $\omega_n = \frac{c\pi}{a} n$.

Problème II : Optique adaptative

II-A : Diffraction par une fente fine

18. Cf. cours.
19. Résultat classique, $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi\lambda\alpha}{a}\right)$.
20. $\alpha = \frac{\lambda}{a}$.

II-B : Influence d'un déphasage variable

21. Le décalage d'une pupille se traduit par un déphasage de l'amplitude diffractée, donc $\bar{w} = \bar{w}_0 \text{sinc}\left(\frac{\pi\lambda\alpha}{a}\right) [1 + \exp(i\frac{2\pi}{\lambda}b\alpha)]$. On en déduit l'inten-

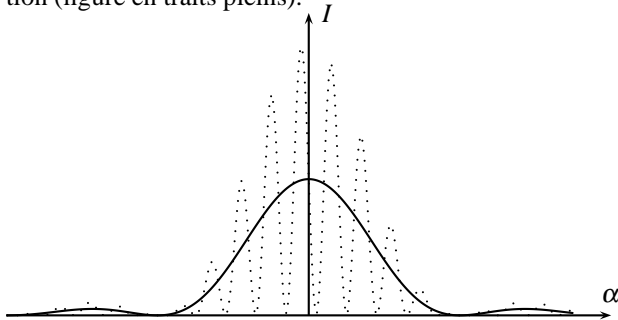
sité $|\bar{w}|^2$, soit $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi\lambda\alpha}{a}\right) [1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}b\alpha\right)]$. a régit

la demi-largeur à la base λ/a de l'enveloppe de diffraction et b régit l'interfrange angulaire $\theta = \lambda/b$, période de la fonction d'interférence.

22. Avec $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi\lambda\alpha}{a}\right) [1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}b\alpha + \psi\right)]$, il y a un **décalage** global de $\Delta\alpha = \psi\theta/2\pi$ des franges, l'enveloppe de diffraction restant inchangée.

23. Il faut $|\Delta\psi| \ll 2\pi$.

24. Avec un temps de pose plus court que le temps caractéristique de variation de ψ , on observe les franges (figure en traits pointillés). Avec un temps de pose plus long que ce temps caractéristique, on n'observe plus que l'enveloppe de diffraction (figure en traits pleins).



II-C : Fluctuations de phase

25. $\bar{w} = \bar{w}_0 [\exp(i\phi(0,t)) + \exp(i[\frac{2\pi}{\lambda}b\alpha + \phi(b,t)])]$.
- $I(\alpha,t) = I_0 [1 + \text{Re}(\bar{z})]$ où $\bar{z} = \exp(i[\frac{2\pi}{\lambda}b\alpha + \psi(b,0,t)])$

26. $\langle I(\alpha,t) \rangle = I_0 [1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda}b\alpha) \exp(-\frac{1}{2}D_\phi(b))]$

27. $\Gamma = \exp(-\frac{1}{2}D_\phi(b))$

28. $b \simeq 2,5\delta_0$. Il faut admettre un faisceau ayant au moins cette largeur pour mettre en évidence de manière précise les effets des perturbations atmosphériques.

II-D : Variations de l'indice optique de l'air

29. $n = 1 + K\frac{P}{RT}$ donc $K = 2,4 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

30. $\delta n = \frac{K}{R} \left(\frac{\delta P}{T} - \frac{P\delta T}{T^2} \right)$. Au niveau de la mer,

on trouve $\delta n_1 = -1,0 \times 10^{-7}$ tandis qu'à haute altitude

$\delta n_2 = -1,6 \times 10^{-8}$. C'est la plus grande **pression** qui ex-

plice la plus grande contribution des couches basses.

31. $\delta\mathcal{L} = h\delta n$; on en déduit $\delta n = \pm 3,3 \times 10^{-8}$ donc

$\delta T = \mp 3 \times 10^{-2} \text{ K}$.

II-E : Cellules de la zone de perturbation

32. $\Delta\theta = \frac{\lambda}{\ell}$.

33. Les fronts d'onde se superposent dès que $L\Delta\theta > \ell$ donc $L > \frac{\ell^2}{\lambda} = 20 \text{ km}$.

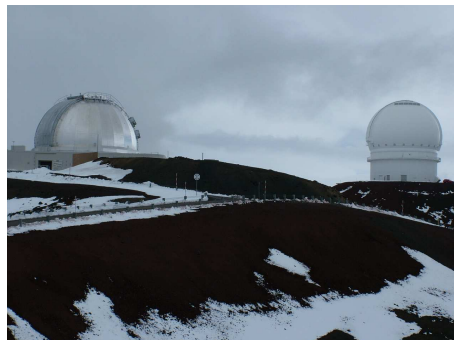
34. $\tau = \frac{\ell}{v} \sim 5 \text{ ms}$.

II-F : Application

35. $\lambda/D = 0,03'' \ll 0,5''$ donc cet étalement n'est pas dû à la diffraction mais bien aux **perturbations atmosphériques**; on a donc $\lambda/\ell = 0,5''$ donc $\ell \sim 0,21 \text{ m}$.

36. Une amélioration d'un **facteur 10**.

37. Le temps de pose long provoque une superposition des taches de diffraction par les cellules de perturbation.



Canada-France Hawaii Telescope (CFHT)