

SOLUTIONS PROPOSÉES POUR LE DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 5

Ce document comporte 2 pages.

ÉLECTROMAGNÉTISME ET MÉCANIQUE

Problème I : Effet Hall

d'après CCP (PC) 2002

I-A : Étude de l'effet Hall en (...)

1.  $\vec{v} = -\frac{\vec{j}}{ne}$ . À vitesse constante, la force de Lorentz

$\vec{F} = -e(\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B})$  est nulle donc  $\vec{E}_H = \frac{1}{ne} \vec{j} \wedge \vec{B} = -\frac{jB}{ne} \vec{e}_y$ .

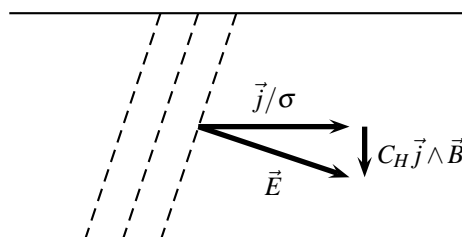
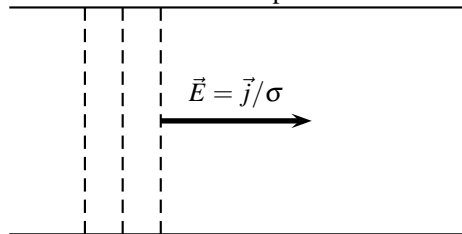
2.  $U_H = -\int_1^2 \vec{E}_H \cdot d\vec{r}$  donc  $U_H = \frac{C_H}{h} IB$  avec  $C_H = \frac{1}{ne}$ .

3. Il vient  $U_H = 0,125 \text{ V}$  et  $n = 1,6 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ .

4.  $\sigma$  est la conductivité du matériau ;  $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_H$  donc

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} - C_H \vec{j} \wedge \vec{B}).$$

5. Les tracés sont reportés ci-dessous.



6.  $\tan \theta = C_H \sigma B$  ne dépend que de  $B$  et du semi-conducteur. Comme  $j^2 = \sigma j E \cos \theta > 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

7. On peut utiliser la plaque pour mesurer  $B$ , en mesurant la tension de Hall  $U_H$ . Il faut donc qu'en l'absence du champ magnétique  $U_H(B=0) = U_{H0} = 0$ . Pour cela, il faut souder deux fils conducteurs exactement en vis-à-vis.

I-B : Régime variable dans la plaque

8. On a ici  $\text{div} \vec{B} = 0$ ,  $\text{div} \vec{E} = 0$  car le conducteur est

électriquement neutre,  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  et  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . On en

déduit que  $\text{div} \vec{j} = 0$  car la divergence d'un rotationnel est nulle.

9. On a vu que  $\vec{j} = \sigma (\vec{E} - C_H \vec{j} \wedge \vec{B})$ ; comme  $\vec{j} \wedge \vec{B} = -jB \vec{e}_y$ , vecteur dont la seule composante ne dépend ni de  $x$  ni de  $z$ ,  $\text{rot} (\vec{j} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$  donc  $\text{rot} \vec{j} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , ou aussi

$$\frac{\partial j}{\partial y} = \sigma \frac{\partial B}{\partial t}. \text{ Avec } \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \text{ il vient } \frac{\partial B}{\partial y} = \mu_0 j.$$

10. On en déduit immédiatement  $\frac{\partial^2 j}{\partial y^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial j}{\partial t}$ .

11. Immédiatement,  $\frac{d^2 \vec{j}}{dy^2} = i\omega \mu_0 \sigma \vec{j}$ .

12. La direction du champ magnétique est perpendiculaire aux plans d'antisymétrie, notamment au plan  $(Oxz)$ ; on en déduit bien que  $\vec{j}(-y, t) = -\vec{j}(y, t)$  puisque, dans l'approximation des régimes quasi-permanents, les lois de la magnéto-statique s'appliquent.

13. On a  $j(-y) = -j(y)$  donc  $\varphi(-y) = \varphi(y)$  et

$$\vec{j}(y) = -\vec{j}(-y). \text{ La résolution de l'équation différentielle}$$

fournit la solution impaire  $\vec{j}(y) = A \text{sh}(ky)$  avec  $k = (1+i)\alpha$ .

14. On a vu que  $\vec{B}(y) = \frac{1}{i\omega\sigma} \frac{dj}{dy}$  donc  $\vec{B} = \frac{kA}{i\omega\sigma} \text{ch}ky$ . Cette

fonction est paire puisque  $\vec{B}$  est inchangé par symétrie relative-ment aux plans d'antisymétrie.

15. Dans ce modèle volumique, on néglige les courants surfaciques et  $\vec{B}$  est continu, donc  $\vec{B}(y = \pm \frac{b}{2}) = B_{0e}$ ; on en

$$\text{déduit } \vec{B} = B_{0e} \frac{\text{ch}(ky)}{\text{ch}(kb/2)} \text{ et } \vec{j} = \frac{k}{\mu_0} B_{0e} \frac{\text{sh}(ky)}{\text{ch}(kb/2)}.$$

16. Encore une fois, le champ est perpendiculaire au plan de symétrie  $(xOy)$ :  $\vec{B}_0 \parallel \vec{e}_z$ . L'existence du plan de symétrie

$$(xOz) \quad B_0(-y) = -B_0(y); \text{ on en déduit que } B_0(0) = 0.$$

$$\text{Finalement, } \frac{dB_0}{dy} = \mu_0 j_0 \text{ donc } B_0(y) = \mu_0 j_0 y.$$

□ 17.  $U_H = \int_1^{1'} \vec{E}_H \cdot d\vec{r} = -C_H \int_1^{1'} \{ (j_0 + j) \vec{e}_x \wedge (B_0 + B) \vec{e}_z \} \cdot \vec{e}_y dy$  donc après développement du produit vectoriel et projection,  $U_H(t) = C_H \int_{-b/2}^{+b/2} (j_0 + j(y,t)) \times (B_0 + B(y,t)) dy$ .

Dans le produit, les termes  $j_0 B_0$  et  $jB$  forment une fonction impaire donc d'intégrale nulle sur la plaque ; il reste à intégrer  $j_0 B + jB_0 = \frac{1}{\mu_0} \left( B \frac{dB_0}{dy} + B_0 \frac{dB}{dy} \right)$  qui est la dérivée de  $\frac{BB_0}{\mu_0}$ , d'où le résultat  $U_H(t) = \frac{C_H}{\mu_0} [B_0(y)B(y,t)]_{-b/2}^{+b/2}$ .

On a donc  $U_H(t) = C_H \frac{1}{h} B_{0e} \sqrt{2} \cos \omega t$  donc  $U_{He} = C_H \frac{1}{h} B_{0e}$ .

La mesure d'effet Hall ne dépend pas des courants induits.

**I-C : Effet Joule dans la plaque**

□ 18.  $P_{T1} = \frac{\ell}{\sigma h b} I^2$ .

□ 19.  $\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \left( \frac{\vec{j}}{\sigma} + C_H \vec{j} \wedge \vec{B} \right) = \frac{j^2}{\sigma}$ , les termes  $j \cdot j_0$  sont de moyenne nulle donc  $P(y) = P_1 + P_2(y)$ .

□ 20.  $\text{rot} \vec{j} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  impose ici  $\frac{\partial j}{\partial y} = \sigma \frac{\partial B_e}{\partial t}$  ; la parité de  $j$  impose  $j(0) = 0$  donc  $j(y,t) = \sigma y \frac{\partial B_e}{\partial t}$  donc finalement

$$P_2(y) = \sigma y^2 \left[ \frac{\partial B_e}{\partial t} \right]^2$$

□ 21. Par intégration sur le volume étudié,  $\int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \frac{1}{12} b^2$  donc  $P_{T2} = \frac{\pi^2}{3} \sigma \ell h b^3 f^2 B_{0e}^2$ .

□ 22.  $P_{T1} + P_{T2} = 2\ell b h \Delta T$  d'où on tire immédiatement  $I = \sqrt{2\sigma b^2 h \ell h \Delta T - \frac{\pi^2}{3} h^2 b^4 f^2 \sigma^2 B_{0e}^2}$ .

□ 23. On a immédiatement  $\frac{I}{I_0} = \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{3} \frac{h b^2 f^2 \sigma B_{0e}^2}{2\ell h \Delta T}}$ .

□ 24. On trouve  $f = 28,9 \text{ kHz}$ .

**Problème II : Vibrations d'une molécule triatomique**

d'après CCP (MM'PP') 1995

□ 25. Les forces extérieures exercées sur le système (S) sont uniquement verticales (poids et réaction) donc l'accélération horizontale de G est nulle. D'autre part, le système reste sur un plan horizontal fixe donc l'accélération verticale de G est nulle. Le repère  $R_G$  est donc galiléen.

□ 26. G est le milieu des points I et I', eux-mêmes barycentres donc milieux des deux barres.

□ 27. De façon évidente,  $GI = \ell \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \ell \cos \frac{\theta}{2}$  et  $\vec{GI} = GI \vec{u}$  ; de plus,  $\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\alpha} \vec{v}$  donc la vitesse de I dans  $R_G$  s'écrit  $\vec{v}(I/R_G) = \ell \left( -\frac{\dot{\theta}}{2} \sin \frac{\theta}{2} \vec{u} + \dot{\alpha} \cos \frac{\theta}{2} \vec{v} \right)$ .

□ 28. Relativement au référentiel  $R_G$ , la barre AB fait avec la droite GY l'angle  $\alpha + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$  et elle a donc une vitesse angulaire  $\left( \frac{1}{2} \dot{\theta} + \dot{\alpha} \right) \vec{e}_z$  et l'application du théorème de König à cette barre mène d'abord à  $\vec{L}_{*}^{AB} = \frac{1}{3} m \ell^2 \left( \frac{1}{2} \dot{\theta} + \dot{\alpha} \right) \vec{e}_z$  donc  $\vec{L}_G^{AB} = \frac{1}{3} m \ell^2 \left( \frac{1}{2} \dot{\theta} + \dot{\alpha} \right) \vec{e}_z + m \vec{GI} \wedge \vec{v}(I/R_G)$  soit, après calculs,  $\vec{L}_G^{AB} = m \ell^2 \vec{e}_z \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\theta} + \dot{\alpha} \right) + \cos^2 \frac{\theta}{2} \dot{\alpha} \right]$ .

La barre AC fait avec le même axe GY l'angle  $\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$  donc  $\vec{L}_{*}^{AC} = \frac{1}{3} m \ell^2 \left( -\frac{1}{2} \dot{\theta} + \dot{\alpha} \right) \vec{e}_z$ . D'autre part, si on note I' son centre,  $\vec{GI}' = -\vec{GI}$  et  $\vec{v}(I'/R_G) = -\vec{v}(I/R_G)$  donc le théorème de König conduit, par la même méthode que comme ci-dessus, à l'expression  $\vec{L}_G^{AC} = m \ell^2 \vec{e}_z \left[ \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{2} \dot{\theta} + \dot{\alpha} \right) + \cos^2 \frac{\theta}{2} \dot{\alpha} \right]$ .

La somme de ces termes est  $\vec{L}_G = 2m \ell^2 \dot{\alpha} \vec{e}_z \left[ \frac{1}{3} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$ .

□ 29. L'énergie cinétique du système matériel est, là aussi, la somme des énergies cinétiques des deux barres ; pour la barre AB, on aura (dans le référentiel  $R_G$ )  $E_{c*}^{AB} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} m \ell^2 \left( \frac{1}{2} \dot{\theta} + \dot{\alpha} \right)^2 + m v(I/R_G)^2 \right]$  par application à la barre du théorème de König ; on écrit alors en développant ces termes  $E_{c*}^{AB} = \frac{m \ell^2}{2} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\theta} + \dot{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{4} \dot{\theta}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$ . Par le même procédé, l'énergie cinétique de la barre AC s'écrit

$E_{c*}^{AC} = \frac{m \ell^2}{2} \left[ \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{2} \dot{\theta} + \dot{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{4} \dot{\theta}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$ . Globalement, il vient pour l'énergie cinétique du système complet  $E_{c*} = m \ell^2 \left[ \frac{1}{4} \dot{\theta}^2 \left( \frac{1}{3} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \dot{\alpha}^2 \left( \frac{1}{3} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right]$  dans ce

référentiel ; enfin, l'application du théorème de König pour le système formé de l'ensemble des deux barres permet d'écrire l'expression  $E_c = m \left( \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 \right) + E_{c*}$ .

□ 30. Les seules forces extérieures sont verticales et n'ont pas de moment sur  $Oz$  ; la projection verticale du moment cinétique est donc constante, ce qui fournit une première équation,  $L_0 = 2m \ell^2 \dot{\alpha} \left[ \frac{1}{3} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$ .

Le système est conservatif (sans frottement, sans travail du poids) et on peut donc écrire la conservation de l'énergie mécanique sous la forme  $E_c + \frac{1}{2} C \theta^2 = E$ .

□ 31. Puisque  $\xi$  et  $\eta$  sont des constantes, la conservation de l'énergie mécanique totale du système E devient ici  $\frac{1}{2} C \theta^2 + m \ell^2 \left[ \frac{1}{4} \dot{\theta}^2 \left( \frac{1}{3} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{L_0^2 / 4m^2 \ell^4}{\frac{1}{3} + \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right] = E$ .

□ 32. On fait un développement à l'ordre 2 sous la forme  $\frac{1}{2} C \theta^2 + \frac{1}{12} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{3L_0^2}{16m \ell^2} \left( 1 + \frac{3}{16} \theta^2 \right) = E$  ou, après dérivation,  $\frac{1}{6} m \ell^2 \ddot{\theta} + \left( C + \frac{9L_0^2}{128m \ell^2} \right) \theta = 0$ . La position  $\theta = 0$  est une position d'équilibre stable ; la fréquence des petits mouvements

est  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6}{m \ell^2} \left( C + \frac{9L_0^2}{128m \ell^2} \right)}$ .

□ 33.  $E_c(\alpha)$  désigne l'énergie de rotation d'ensemble du système.  $E_c(\theta)$  désigne l'énergie de torsion du système.