

DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 2 (10/10/07)

Ce document comporte 5 pages.

MÉCANIQUE

Problème I : Orbite héliosynchrone

d'après Centrale-Supélec (MP) 2006

Les satellites d'observation comme SPOT 5 évoluent sur des orbites dites héliosynchrones. Une orbite héliosynchrone permet de s'assurer que le satellite survolera toujours à la même heure solaire locale une région quelconque de la planète. Ainsi, l'illumination des terrains survolés est toujours la même et permet une comparaison efficace de photographies prises à des époques différentes.

La Terre est considérée dans cette partie comme un solide de révolution autour de l'axe des pôles ($z'z$), de masse \mathcal{M} . Le mouvement est décrit dans le référentiel géocentrique. Dans toute la suite, les frottements seront négligés.

1. Question préliminaire : définir ce référentiel géocentrique.

I-A : Premier modèle du champ de gravitation

La Terre, dans ce premier modèle, est sphérique de rayon R , de centre O , formée de couches concentriques homogènes. On rappelle qu'en un point M , situé à la distance r de O , le potentiel de gravitation selon la loi de Newton est $V(M)$, et le vecteur champ de gravitation \vec{g} est défini par $\vec{g}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$. Dans le plan du mouvement, les coordonnées cylindro-polaires d'origine O seront notées $r = OM$, $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$, et \vec{e}_r , \vec{e}_θ sont les vecteurs unitaires correspondants.

En M , hors de la distribution de masses, V prend ici la forme (potentiel newtonien) $V(r) = -\mathcal{G} \frac{\mathcal{M}}{r}$ où \mathcal{G} est la constante de la gravitation universelle.

2. Citer, avec justification rapide, deux grandeurs relatives au mouvement qui restent invariantes au cours du mouvement général elliptique d'un satellite, assimilé à un point matériel de masse m , autour de la Terre. Définir la « constante des aires » C et donner son expression en fonction de r et $\dot{\theta}$.

On se propose de retrouver la nature et l'équation de la trajectoire par la méthode ci-après :

3. Relier, à l'aide du principe fondamental de la dynamique, les dérivées des vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et $\vec{e}_\theta(t)$. En déduire l'expression de $\vec{v}(t)$ que l'on mettra sous la forme $\vec{v}(t) = K(\vec{e}_\theta(t) + \vec{E})$ où \vec{E} est un vecteur constant durant le mouvement, fixé par les conditions du lancement. Préciser l'expression de K .

4. Projeter la relation précédente sur \vec{e}_θ et retrouver l'expression classique de la trajectoire d'un satellite de la forme $r(\beta) = \frac{p}{1 + e \cos \beta}$; définir β . Afin d'exprimer simplement r en fonction de θ , montrer qu'il est judicieux de choisir l'axe polaire ($x'x$), en donnant à l'angle (\vec{E}, \vec{e}_x) une valeur remarquable γ , à calculer.

5. Représenter, dans son plan, la trajectoire, le vecteur \vec{E} , et le satellite M dans une position quelconque. Proposer un nom pour le vecteur \vec{E} .

I-B : Deuxième modèle du champ de gravitation

Dans cette partie, on retient un autre modèle pour le « géoïde terrestre », assimilé maintenant à un ellipsoïde de révolution autour de l'axe ($z'z$), et l'expression $V(M)$ du potentiel de gravitation est un développement limité dont on retiendra seulement les deux premiers termes.

Au potentiel newtonien vu précédemment, s'ajoute une perturbation très faible dépendant non seulement de r , mais aussi de la latitude λ du point M . Au point M de latitude λ , tel que $OM = r$ (fig. 1 à gauche), on admet l'expression

$$V(M) = -\mathcal{G} \frac{\mathcal{M}}{r} \left(1 + \eta \frac{R^2}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \lambda) \right), \text{ avec } \eta = 1,083 \times 10^{-3}, R = 6\,378 \text{ km}, \mathcal{G} \mathcal{M} = 4,00 \times 10^{14} \text{ SI.}$$

6. Exprimer les composantes g_r et g_λ du champ de gravitation sur la base adaptée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\lambda)$.

Pour un satellite d'observation, il est intéressant d'optimiser les visées de toutes les régions de la Terre :
 – par le choix d'une trajectoire pratiquement circulaire, d'orbite assez basse (altitude 800 km environ) ;

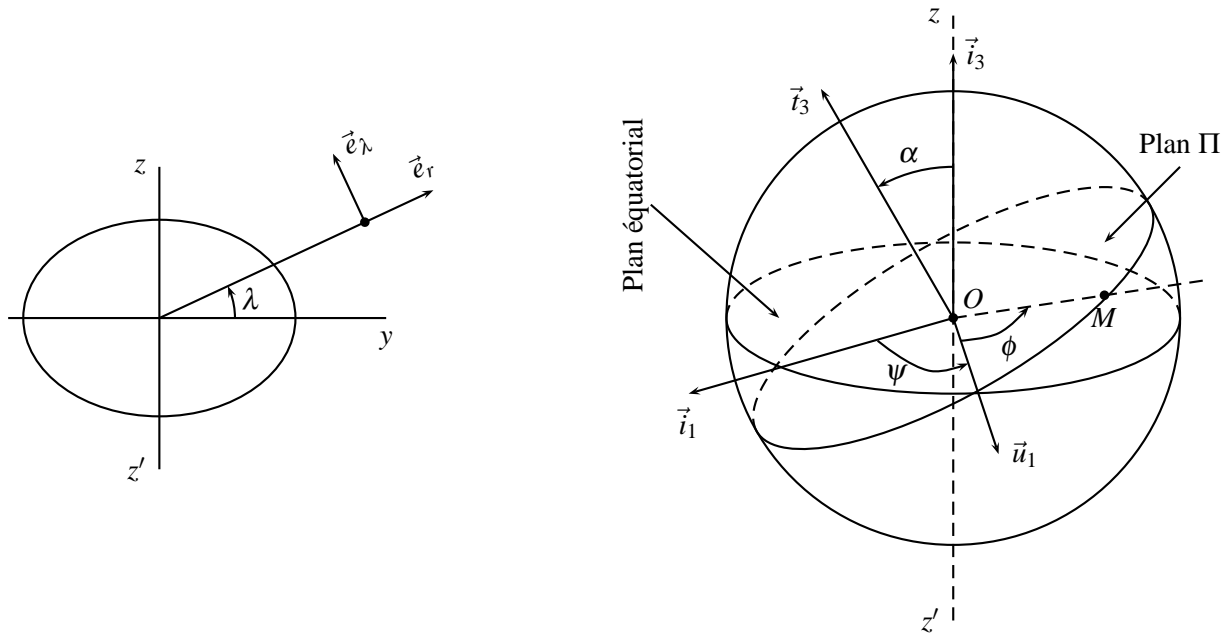


FIG. 1 – Latitude d'un point (à gauche). Géométrie de la trajectoire (à droite)

– par les mêmes conditions d'éclairement solaire des zones observées.

Or, quand le satellite repasse, au terme de quelques jours, à la verticale d'une cible, le déplacement du Soleil dans sa course apparente autour de O devrait changer son éclairement. Un choix convenable de l'inclinaison α de la trajectoire sur le plan équatorial peut corriger cet inconvénient. En effet, le terme principal $\vec{g}_r = g_r \vec{e}_r$ du champ de gravitation confère à la trajectoire ses propriétés essentielles (mouvement plan, circulaire), tandis que le terme $\vec{g}_\lambda = g_\lambda \vec{e}_\lambda$ très faible devant le précédent, perturbe le mouvement idéal, par une lente évolution des paramètres au cours du temps. Si l'on admet l'hypothèse raisonnable (\mathcal{H}_1) qu'au cours d'une révolution du satellite, le mouvement reste plan et circulaire, dans ce modèle, le plan Π de l'orbite subit une précession et une nutation lentes, fonction de son inclinaison α sur le plan équatorial de la Terre.

La figure 1 à droite montre le plan équatorial de la Terre et le plan Π de l'orbite circulaire de rayon r non perturbée. On définit les référentiels et bases vectorielles suivants :

- \mathcal{R}_a , référentiel galiléen absolu des deux modèles de potentiel (sphérique et perturbé), de base $(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$, où \vec{i}_3 est porté par $(z'z)$, \vec{i}_1 et \vec{i}_2 étant situés dans le plan équatorial.
- \mathcal{R}_u , référentiel intermédiaire (fixe dans le premier modèle), de base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{i}_3)$, \vec{u}_1 étant situé à l'intersection du plan équatorial terrestre et du plan Π . On note $(\vec{i}_1, \vec{u}_1) = \psi$.
- \mathcal{R}_t , référentiel lié au plan Π , de base $(\vec{u}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$, telle que \vec{t}_3 est déduit de \vec{i}_3 , par rotation d'angle α autour de \vec{u}_1 : α est l'angle d'inclinaison de Π sur le plan équatorial de la Terre.
- précession : mouvement dans \mathcal{R}_a du vecteur \vec{u}_1 autour de \vec{i}_3 .
- nutation : mouvement dans \mathcal{R}_a du vecteur \vec{t}_3 autour de \vec{u}_1 .

À cause de la perturbation, la base de \mathcal{R}_t est en mouvement de vecteur rotation $\vec{\Omega}$ par rapport à \mathcal{R}_a et \vec{u}_1 tourne autour de \vec{i}_3 à la vitesse angulaire $\dot{\psi}$. Selon (\mathcal{H}_1), le mouvement du satellite dans \mathcal{R}_t est circulaire uniforme et on note $\phi = (\vec{u}_1, \vec{OM})$.

- 7. Exprimer $\vec{\Omega}$ en fonction de $\dot{\psi}$ et α .
- 8. Selon (\mathcal{H}_1), quelle est, dans la base $(\vec{u}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3)$ de \mathcal{R}_t , l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ du satellite M (point matériel de masse m) ? Que vaut alors le produit $\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_O$? Dans toute la suite, on fera l'hypothèse suivante : $\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_O = 0$ (hypothèse (\mathcal{H}_2)). Justifier cette hypothèse.
- 9. En tenant compte de (\mathcal{H}_1), donner l'expression vectorielle du théorème du moment cinétique appliqué en O , dans le référentiel \mathcal{R}_a , au satellite M .
- 10. Montrer, en tenant compte de (\mathcal{H}_1) et (\mathcal{H}_2) que $\vec{\Omega} = m \vec{OM} \cdot (\vec{\sigma}_O \cdot \vec{g}_\lambda) / \sigma_O^2$.
- 11. Pour la suite, on admet les relations $\sin \lambda = \sin \alpha \cdot \sin \phi$ et $\vec{t}_3 \cdot \vec{e}_\lambda = \cos \alpha \cdot \cos \lambda$. La perturbation g_λ (et par suite Ω) étant très faible, on recherche la valeur moyenne $\langle \vec{\Omega} \rangle$ de $\vec{\Omega}$ sur une période où ϕ varie de 0 à 2π . Montrer

que $\langle \vec{\Omega} \cdot \vec{u}_1 \rangle = 0$ et $\langle \vec{\Omega} \cdot \vec{i}_3 \rangle = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{r^7}} \eta R^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha$, avec $r = OM$. Interpréter ces deux résultats.

- 12. On impose alors au mouvement de précession du vecteur \vec{u}_1 autour de \vec{i}_3 d'avoir pour vitesse angulaire la vitesse apparente de rotation du soleil dans le repère géocentrique. Quel est son ordre de grandeur numérique ?
- 13. Montrer qualitativement que cette condition répond à une des exigences demandées aux satellites d'observation. Écrire l'équation dont l'inclinaison α du plan Π est solution. Calculer numériquement α pour une altitude $h = 800$ km et $\alpha \in [0, \pi]$. Conclusion ?

Problème II : Corde pesante et vibrante

d'après Mines-Ponts (PC) 2007

L'objet de l'étude est une corde AB de longueur L , parfaitement flexible et sans frottements internes, de section négligeable, homogène de masse totale m_T et de densité linéique uniforme μ . On l'étudie dans un plan vertical défini par le repère (Oxz) dont la définition varie d'une partie à l'autre et qui est choisie en fonction de la configuration du problème étudié. On sera donc attentif à l'orientation de l'axe Oz . On appelle G le centre de masse de la corde.

II-A : Étude cinématique d'un mouvement bidirectionnel

II-A-1 : Première expérience

La corde AB est posée le long de l'axe Ox d'une table horizontale (fig. 2 à gauche). On soulève l'extrémité B avec une vitesse verticale constante v_0 , la corde se déplaçant dans le plan vertical (Oxz) avec le vecteur unitaire \vec{e}_z orienté vers le haut (fig. 2 à droite). À l'instant t , l'ordonnée de B est donc $z = v_0 t$ ($v_0 = \|\vec{v}_0\|$). On admettra que tous les points de la corde qui sont en contact avec la table sont au repos et on conviendra que la corde est coudée en angle droit au point C de la corde situé sur la table, à l'aplomb du point B (ce qui revient à négliger la courbure en C). On note G_1 la position du centre de masse G de la corde tant que cette dernière est sur la table et G_2 la position de G quand la corde est totalement verticale.

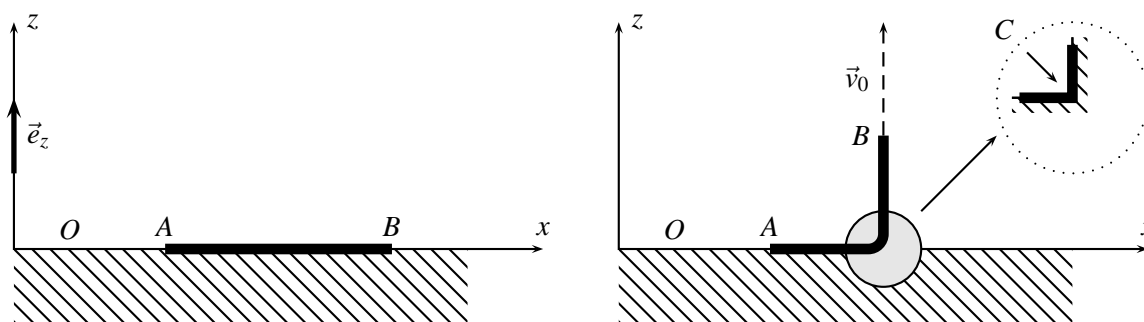


FIG. 2 – Première expérience

- 14. Établir que, tant que la corde touche la table, l'ordonnée de son centre de masse G_1 est $z(G_1) = z^2/2L$.
- 15. En déduire que la composante verticale de l'accélération $\vec{a}(G_1)$ du centre de masse de la corde est constante et donner son expression en fonction de v_0 et de L .
- 16. Lorsque la corde est entièrement verticale en contact avec la table (nouvel instant initial), on abaisse le point B avec la vitesse $-\vec{v}_0$ jusqu'à ce que la corde se retrouve sur l'axe (Ox) de la table. Quelle est l'expression de l'accélération instantanée $\vec{a}(G_2)$ du centre de masse G_2 de la corde ? On ne se préoccupera pas de la manière dont la corde s'étale dans le plan de la table.
- 17. Quelle est, selon ce modèle, l'accélération du point C de la corde ?

II-A-2 : Seconde expérience

La corde est verticale, en contact avec la table en son point le plus bas A . On la lâche sans vitesse initiale. On admet que le mouvement de B est uniformément accéléré, d'accélération $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ (accélération de la pesanteur). On admet toujours que les points de la corde sont au repos dès qu'ils touchent la table.

- 18. Exprimer le temps de chute τ de la corde en fonction de L et de g . Calculer τ pour $L = 2,4$ m et $g = 10$ m \cdot s $^{-2}$.
- 19. Déterminer l'accélération instantanée $\vec{a}(G)$ du centre de masse en fonction de g , τ et du temps t .
- 20. Représenter graphiquement l'évolution temporelle de $a(G)$ pendant la chute. Justifier qualitativement la présence d'un minimum de vitesse, v_{\min} pendant la chute. Exprimer en fonction de τ l'instant t_0 où la vitesse du centre de masse passe par v_{\min} . Calculer t_0 . Exprimer v_{\min} en fonction de L et de τ . Calculer v_{\min} .

II-B : Vibrations de la corde verticale fixée aux deux extrémités

La corde est à nouveau verticale, fixée en ses deux extrémités A et B (fig. 3 à gauche). L'axe des z est toujours orienté vers le bas et l'origine est maintenant à l'extrémité B : les points O et B coïncident. L'axe (Ox) est dans un plan horizontal. La tension de la corde au point A , $T(A)$ est très grande devant le poids de la corde : $T(A) \gg m_T g$. La position d'un point M de la corde est repérée par sa cote z dans un référentiel galiléen lié à B .

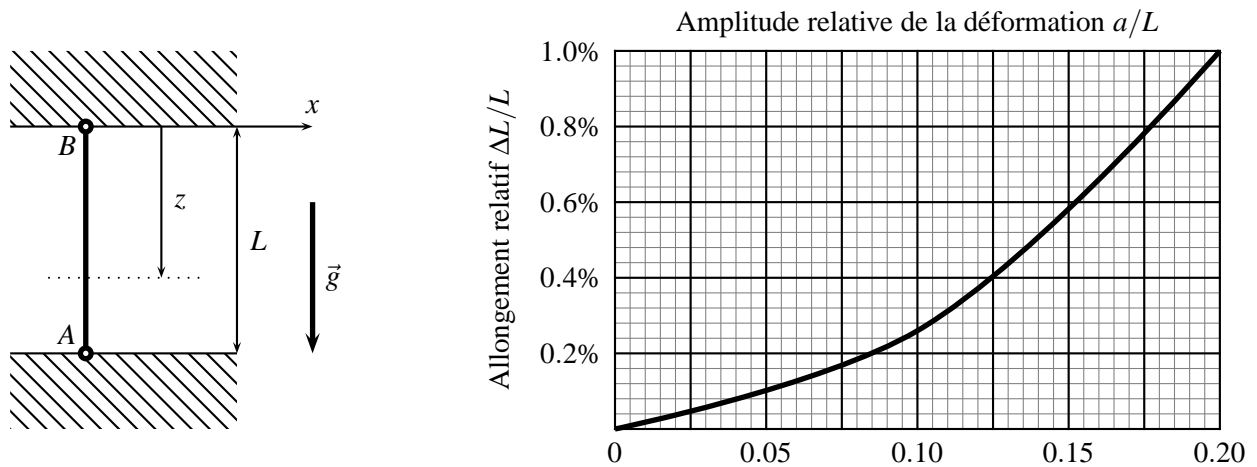


FIG. 3 – Vibrations de la corde

II-B-1 : Position d'équilibre

□ 21. Définir ce qu'est la tension $T(M)$ de la corde en un point M . Exprimer $T(M)$ en fonction de $T(A)$, $m_T g$ et $\mu g z$. Montrer qu'à l'équilibre $T(M)$ est pratiquement constante le long de la corde.

On admettra que ce résultat reste vrai en régime de vibrations et on notera T_0 la tension de la corde.

II-B-2 : Vibrations

□ 22. La corde vibre et le point M , de cote z à l'équilibre, se déplace transversalement. Ce déplacement, noté x , est fonction de z et du temps t : $x = x(z, t)$. On note $\theta(z, t)$ l'angle que fait localement la corde avec l'axe vertical. Exprimer la projection horizontale dF_x de la résultante des forces exercées sur un élément de corde compris entre les hauteurs z et $z + dz$, en fonction de T_0 et de $\partial\theta/\partial z$.

□ 23. En écrivant le principe fondamental de la dynamique appliqué au même élément, établir (en négligeant les termes d'ordre supérieur) l'équation différentielle $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ et exprimer la grandeur c en fonction de T_0 et de la masse linéique μ . Quelle est son unité ? Calculer c pour $\mu = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ et $T_0 = 1 \text{ N}$.

□ 24. À l'instant initial, la forme de la corde est donnée par $x(z, 0) = a \sin(\pi z/L)$, où a est une constante positive. Les vitesses initiales de tous les points de la corde sont nulles. Déterminer la fonction (dite onde stationnaire) $x(z, t)$ sous la forme $x(z, t) = X(z) \cdot A(t)$.

□ 25. La fig. 3 (à droite) représente l'allongement relatif de la corde en fonction de l'amplitude initiale de la déformation. Commentez ce résultat, par exemple en discutant l'hypothèse (implicite !) que la masse linéique ne changeait pas au cours du mouvement.

Problème III : Vibrations de la molécule de CO_2

d'après Centrale-Supélec (MP) 2003

Pour étudier les vibrations de la molécule de CO_2 , nous supposons que chacune des liaisons CO est indépendante de l'autre. Les trois atomes sont assimilés à des points matériels de masse $m_1 = 2,66 \times 10^{-26} \text{ kg}$ pour l'oxygène et $m_2 = 1,99 \times 10^{-26} \text{ kg}$ pour le carbone. L'atome de carbone interagit avec les atomes d'oxygène qui l'entourent. On néglige l'action de la pesanteur, les interactions entre les deux atomes d'oxygène extrêmes et on considère le système isolé formé par une seule molécule.

III-A : Vibrations longitudinales de la molécule de CO_2

Nous supposons dans cette partie que la molécule est parfaitement linéaire : les trois atomes restent alignés dans une direction de vecteur unitaire \vec{e}_x . Au voisinage de sa configuration d'équilibre, on peut modéliser l'interaction de l'atome de carbone central avec les atomes d'oxygène par deux ressorts de raideur et de longueur au repos identiques

(respectivement notées k et r_0 , avec $k = 1,42 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $r_0 = 0,166 \text{ nm}$). À l'équilibre les deux liaisons ont même longueur et l'atome de carbone est confondu avec le centre d'inertie de la molécule. En dehors de l'équilibre, chaque atome est repéré par son déplacement relativement à sa position d'équilibre : x_1, x_2, x_3 (fig. 4 à gauche).

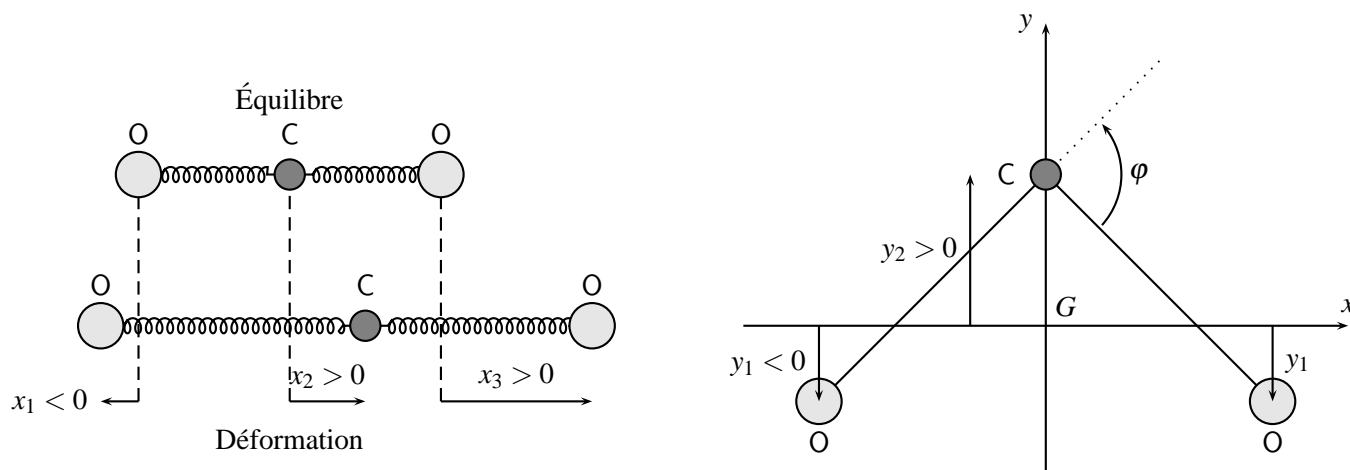


FIG. 4 – Mouvements longitudinaux (à gauche) et de flexion (à droite) de la molécule CO_2

- 26. Définir le référentiel barycentrique (\mathcal{B}) de la molécule. Justifier que ce référentiel est galiléen.

Dans toute la suite, toutes les grandeurs cinématiques seront évaluées dans le référentiel barycentrique de la molécule.

- 27. Justifier la relation $m_1(x_1 + x_3) + m_2x_2 = 0$. Montrer que x_1 et x_3 vérifient un système différentiel de la forme $\frac{d^2x_1}{dt^2} + ax_1 + bx_3 = 0$, $\frac{d^2x_3}{dt^2} + ax_3 + bx_1 = 0$. Exprimer a et b en fonction de k, m_1, m_2 .

On recherche les solutions harmoniques du système. Dans ce cas, on peut associer aux grandeurs $x_1(t), x_2(t)$ et $x_3(t)$ les grandeurs complexes $\bar{x}_1(t) = A_1 \exp(j\omega t)$, $\bar{x}_2(t) = A_2 \exp(j\omega t)$ et $x_3(t) = A_3 \exp(j\omega t)$ où les A_i sont a priori complexes.

- 28. Déterminer les deux seules valeurs positives de ω qui conduisent à des coefficients A_i non tous nuls. On désignera la plus petite de ces pulsations par ω_{I} et l'autre par ω_{II} et on les exprimera en fonction de k, m_1, m_2 .
- 29. Calculer numériquement ω_{I} et ω_{II} .

- 30. Les solutions ainsi déterminées correspondent à deux sortes de mouvements. Dans l'un d'entre eux l'atome de carbone reste fixe. Quelle est la pulsation associée et quel est alors le mouvement des deux atomes d'oxygène ? Pouvait-on le prévoir ? Dans l'autre type de mouvement les deux atomes d'oxygène ont même déplacement à chaque instant. Quelle est la pulsation correspondante ? Calculer dans ce cas le rapport A_2/A_1 .

III-B : Modes de flexion de la molécule de CO_2

On étudie maintenant un autre type de mouvement dans lequel les liaisons ont une longueur fixe, r_0 , mais où les deux liaisons CO peuvent former entre elles un angle φ (fig. 4 à droite). Pour les faibles valeurs de φ , l'énergie potentielle associée à la flexion de la molécule est notée $E_p = \frac{1}{2}C\varphi^2$, avec $C = 7,70 \times 10^{-19} \text{ J}$.

- 31. Justifier qualitativement la forme de cette énergie potentielle.

On envisage un mode de déplacement particulier, de faible amplitude, dans lequel le plan de la molécule est fixe (noté G_{xy}), l'atome de carbone reste sur la verticale G_y , avec un déplacement y_2 par rapport à la position d'équilibre (3 atomes alignés), les deux atomes d'oxygène ayant le même déplacement vertical y_1 et de petits déplacements horizontaux x_1, x_3 .

- 32. Montrer que, pour de petits déplacements, on a, au premier ordre en φ , $y_2 \left(1 + \frac{m_2}{2m_1}\right) = r_0 \frac{\varphi}{2}$ et $x_1 = x_3 = 0$.
- 33. Exprimer l'énergie cinétique de la molécule en fonction de $d\varphi/dt, m_1, m_2$ et r_0 .
- 34. Déterminer littéralement puis numériquement la pulsation ω_{III} des petites oscillations de φ autour de 0, dans ce mode de vibration.