

SOLUTIONS PROPOSÉES POUR LE DEVOIR LIBRE N° 6

Ce document comporte 3 pages.

CHAMPS ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE

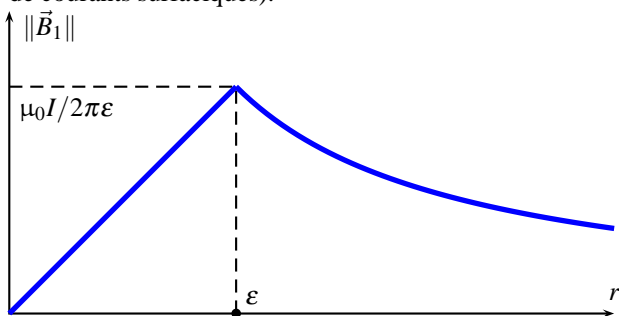
Problème I : Détecteurs à boucle inductive

d'après Centrale-Supélec (PSI) 2007

I-A : Champ magnétique créé par un (...)

- 1. \vec{j}_1 étant uniforme, on a $I = j_1 \cdot \pi \varepsilon^2$ d'où $\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi \varepsilon^2} \vec{u}_Z$.
- 2. Un plan contenant l'axe Oz et le point M est plan de symétrie matérielle des courants; le champ en M est donc perpendiculaire à ce plan, et $\vec{B}_1(M) = B_1(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$. Les invariances par rotation d'angle arbitraire autour de Oz et par translation (fil infini) imposent alors $\vec{B}_1 = B_1(r) \vec{u}_\theta$. On applique donc le théorème d'Ampère sur une ligne de champ, cercle de rayon r et d'axe Oz ; il vient $2\pi r B_1(r) = \mu_0 I_r$ où le courant enlacé est $I_r = I$ si $r > \varepsilon$ et $I_r = I \frac{r^2}{\varepsilon^2}$ sinon. Il reste $\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ si $r > \varepsilon$, $\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi \varepsilon^2} \vec{u}_\theta$ si $r \leq \varepsilon$.

La courbe tracée ci-dessous montre la continuité de \vec{B}_1 (absence de courants surfaciques).



I-B : Inductance linéique de deux fils (...)

- 3. $E_m = \frac{1}{2} L I^2$, résultat du cours.
- 4. $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ donc $E_m = \int \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$, l'intégrale étant étendue à tout l'espace.
- 5. Par identification directe, $L_{lin} = \frac{\mu_0}{4\pi} (1 + 4 \ln \frac{a}{\varepsilon})$.

I-C : Inductance de la boucle enterrée

- 6. Le champ magnétique est la somme des champs créés par les deux paires de fils; il en va donc de même du flux, puis de l'inductance associées puisque toutes les relations qui lient ces grandeurs sont linéaires. On a donc $L_1 =$

$\frac{\mu_0}{4\pi} [a(1 + 4 \ln \frac{b}{\varepsilon}) + b(1 + 4 \ln \frac{a}{\varepsilon})]$ et, dans le cadre de l'approximation proposée ($b \gg a$), il reste $L_1 = \frac{\mu_0 b}{4\pi} (1 + 4 \ln \frac{a}{\varepsilon})$.

- 7. Pour N spires, le champ magnétique est multiplié par N , ainsi que la surface à travers laquelle on détermine le flux; on a $L = N^2 L_1$ (on pourrait aussi affirmer que l'intégrale sur un volume inchangé de B^2 est multipliée par N^2). Numériquement, $L = 0,125 \text{ mH}$, résultat faible mais vraisemblable même pour des circuits de longueur non infinie.

I-D : Effet du passage d'un véhicule

- 8. La composante normale du champ magnétique est conservée à la traversée de la surface séparant l'air du conducteur parfait, dans lequel le champ magnétique est nul. Le champ magnétique extérieur est donc tangent à l'interface.

La relation de passage $\vec{B}_{II} - \vec{B}_I = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{I \rightarrow II}$ s'écrit ici $\vec{B}(y = 0^-) = \mu_0 \vec{u}_Y \wedge \vec{j}_s$.

- 9. Dans le problème C, la distribution de courant est invariante par symétrie par rapport au plan Oxz donc le champ magnétique en un point de ce plan est perpendiculaire à ce plan : cela ne correspond pas au problème A. Dans le problème D, la distribution de courant est invariante par antisymétrie par rapport au plan Oxz donc le champ magnétique en un point de ce plan est contenu dans ce plan : cela correspond au problème A. C'est donc le Problème D qui est équivalent pour $y < 0$ au problème A.

□ 10. La résultante des champs créés par les deux fils d'abscisse $a/2$ est $\vec{B}_+(M) = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta \vec{u}_X$ avec $\cos \theta = \frac{h}{r}$ et $r = \sqrt{h^2 + (x - a/2)^2}$ donc on peut écrire ce champ $\vec{B}_+(M) = \frac{\mu_0 I h}{\pi} \frac{1}{h^2 + (x - a/2)^2} \vec{u}_X$. En ajoutant le champ créé par les deux autres fils, il vient (en remplaçant a par $-a$ et I par $-I$) $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I h \vec{u}_X}{\pi} \left[\frac{1}{h^2 + (x - a/2)^2} - \frac{1}{h^2 + (x + a/2)^2} \right]$ et l'application de la relation de passage montre bien que

$$\vec{j}_s(c) = \frac{I h}{\pi} \left(\frac{1}{h^2 + (x - \frac{a}{2})^2} - \frac{1}{h^2 + (x + \frac{a}{2})^2} \right) \vec{e}_z.$$

- 11. La densité volumique de puissance dissipée par effet Joule est $p_J = \vec{j} \cdot \vec{E}$ donc $p_J = \frac{1}{\gamma_0} \frac{j^2}{\delta^2}$. La puissance dissipée par

unité de longueur selon (Oz) est donc $\mathcal{P}_{\text{lin}} = \frac{1}{\gamma_0 \delta^2} \int J_s^2(x) d\tau$ avec $d\tau = \delta dx$, d'où le résultat $\mathcal{P}_{\text{lin}} = \frac{1}{\gamma_0 \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} J_s^2(x) dx$.

□ 12. Par intégration sur le conducteur supposé de longueur infinie, $\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\delta \gamma_0} \left(\frac{Ih}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{h^2+(x-a/2)^2} - \frac{1}{h^2+(x+a/2)^2}\right)^2 dx$. Un changement de variables évident mène, en reconnaissant l'intégrale proposée par l'énoncé, à $R_v = \frac{hb}{\pi \delta \gamma_0} \frac{1}{1+(\frac{2h}{a})^2}$.

□ 13. $R_v = 7,8 \times 10^{-6} \Omega$, $R = \frac{2b}{\gamma_{cu} \pi \epsilon^2} = 0,02 \Omega$ donc

$R_v \ll R$. On pourra donc négliger la résistance du véhicule devant celle de la boucle.

□ 14. Les courants induits sont équivalents aux deux fils de cote $+h$ et la composante sur \vec{u}_y du champ \vec{B}_1 créé par le fil d'abscisse $+a/2$ est donc (calculs analogues à ceux déjà faits plus haut) $B_{1y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x-a/2}{4h^2+(x-a/2)^2}$ au niveau d'un point de cote $-h$. Ajoutant l'effet de l'autre fil (on remplace a par $-a$ et I par $-I$) il vient pour le champ total

$$B_y(x, y = -h) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{x-a/2}{4h^2+(x-a/2)^2} - \frac{x+a/2}{4h^2+(x+a/2)^2} \right].$$

□ 15. Le flux à travers une surface de côté ℓ sur Oz et a sur Ox , orientée par \vec{u}_y est $\Phi = \int_0^\ell dz \int_{-a/2}^{a/2} \vec{B}(M) \cdot \vec{u}_y dx$ soit

$\Phi = \frac{\mu_0 I \ell}{\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{a/2-x}{4h^2+(a/2-x)^2} dx$ (les contributions des deux parties du champ sont, pour des raisons de symétrie, égales). Après un changement de variables $u = \frac{x-a/2}{2h}$, et en utilisant l'expression de l'énoncé, on trouve $\Phi = \ell \Phi_{\text{lin}}$ avec

$$\Phi_{\text{lin}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a^2}{4h^2}\right).$$

□ 16. Le flux induit par le champ magnétique du véhicule vaut donc $\Phi_v = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a^2}{4h^2}\right)$.

□ 17. $\Phi_p = LI$. En présence du véhicule, $\Phi = \Phi_p + \Phi_v$

donc $L = L + \Delta L$ avec $\Delta L = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a^2}{4h^2}\right)$. L'inductance propre diminue donc.

□ 18. L'inductance propre de la boucle pour $N = 1$ vaut $0,125/25 = 5 \times 10^{-6} \text{ H}$; on a donc $S_{\text{boucle}} = 8 \times 10^{-2}$.

□ 19. Le champ magnétique crée au voisinage de la surface du véhicule est N fois plus grand, ainsi donc que le courant induit; le flux induit par ce courant dans une boucle est multiplié par N , et le flux total dans les N boucles est donc multiplié par N^2 . On a donc $\Delta L_N = N^2 \Delta L_1$. Comme $L_N = N^2 L_1$, la sensibilité de la boucle ne dépend pas de N .

Problème II : Anneau de stockage pour molécules polaires d'après Polytechnique (PC) 2005

II-A : Hexapôle électrostatique

□ 20. Du fait de l'invariance par translation, aucune grandeur électrique ne dépend de z : $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \vec{0}$.

□ 21. Du fait de la symétrie par rapport à tout plan perpendiculaire à (Oz), le champ \vec{E} appartient à chacun de ces plans donc $E_z = 0$; on pouvait d'ailleurs le déduire du fait que

$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$. En utilisant des coordonnées polaires dans le plan (xOy), on notera $V = V(r, \theta)$ et $\vec{E} = E_r(r, \theta)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta$.

□ 22. Chacun des plans de symétrie de l'hexagone est aussi un plan de symétrie matérielle; c'est le cas des plans d'équation $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Le potentiel V ayant les mêmes symétries, on peut écrire $V(r, \theta) = V(r, -\theta)$, $V(r, \frac{\pi}{3} + \theta) = V(r, \frac{\pi}{3} - \theta)$ et

$$V(r, -\frac{\pi}{3} + \theta) = V(r, -\frac{\pi}{3} - \theta).$$

Le vecteur champ électrique présente aussi les mêmes plans de symétrie, donc par exemple $E_r(r, \theta) = E_r(r, -\theta)$ et $E_\theta(r, \theta) = -E_\theta(r, -\theta)$; toutefois, ces propriétés ne sont qu'une conséquence de $V(r, \theta) = V(r, -\theta)$ puisque $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ et $E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$: la dérivation d'une fonction paire mène à une fonction impaire. On pourra noter que E_r est une fonction symétrique (paire) par rapport à $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$, tandis que

E_θ est une fonction antisymétrique (impaire) par rapport aux

mêmes axes.

□ 23. Considérons un des trois plans passant par l'axe et à égale distance des électrodes, par exemple le plan $\theta = \frac{\pi}{6}$. Il s'agit d'un plan de symétrie négative des charges, et le champ \vec{E} lui est en tout point orthogonal. Une surface orthogonale à \vec{E} est une surface équipotentielle; chacun de ces plans est donc équipotentiel: $\frac{\partial V}{\partial r}(r, \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}) = 0, k \in \mathbb{Z}$.

□ 24. Les propriétés ci-dessus montrent que V considéré comme une fonction de θ , est une fonction évidemment 2π -périodique, paire, avec des symétries par rapport à $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$; c'est donc une fonction de période $\frac{2\pi}{3}$. On peut donc écrire

$V(r)$ sous forme d'une série ne comportant que des termes pairs, $V(r, \theta, z) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r) \cos(3k\theta)$.

□ 25. L'électrode considérée présente une invariance de révolution et de translation, donc tout plan passant par son axe est plan de symétrie matérielle, ainsi que tout plan perpendiculaire à cet axe. Le champ \vec{E} est donc compris dans l'intersection de ces deux axes: $\vec{E} = E_r(r', \theta', z')\vec{e}'_r$, où les coordonnées polaires sont ici relatives à l'axe de l'électrode. Les invariances imposent aussi $E_r(r', \theta', z') = E_r(r')$, ce qui suggère d'appliquer le théorème de Gauss à un cylindre de hauteur arbitraire ℓ , d'axe ($O'z'$) et de rayon r' ; on aura alors $E_r(r') \times 2\pi r' \ell = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$ donc $-\frac{\partial V}{\partial r'} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r'}$ ce qui s'écrit $V(r') = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r'}{r'_0}$, où r'_0 est une distance arbitraire. Avec les notations de l'énoncé,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 D} \vec{e}_D \text{ et } V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{D}{D_0}.$$

□ 26. Le théorème de superposition permet d'écrire $V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}$, en supposant nul le potentiel au

centre (où $D_i = R, \forall i$) sous réserve que la présence des autres électrodes ne perturbe pas la répartition uniforme de la charge sur la surface extérieure de chacune d'entre elles ; c'est la condition $R \gg a$ qui permet de faire cette approximation.

□ 27. $D_i = |Z - Z_i|$ donc, compte tenu des expressions de Z_i , $\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} = \left| \frac{(Z+R)(Z+jR)(Z+j^2R)}{(Z-R)(Z-jR)(Z-j^2R)} \right|$; le développement de cette expression mène à $\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} = \left| \frac{Z^3 + aZ^2 + bZ + c}{Z^3 - aZ^2 + bZ - c} \right|$, avec $a = R(1 + j + j^2) = 0$ (somme des racines troisièmes de l'unité), $b = R(j^3 + j^2 + j) = ja = 0$ et enfin $c = j^3 R = R$; on a donc bien

$$\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} = \left| \frac{R^3 + Z^3}{R^3 - Z^3} \right|.$$

□ 28. Un développement limité de l'expression précédente impose $\frac{R^3 + Z^3}{R^3 - Z^3} \simeq 1 + 2 \left(\frac{Z}{R} \right)^3$ puisque $|Z| \ll R$; on a donc $\left| \frac{R^3 + Z^3}{R^3 - Z^3} \right|^2 = \left[1 + 2 \left(\frac{Z}{R} \right)^3 \right] \left[1 + 2 \left(\frac{Z^*}{R} \right)^3 \right] \simeq 1 + 4 \frac{\text{Re}(Z^3)}{R^3} = 1 + 4 \frac{r^3 \cos(3\theta)}{R^3}$ car $Z = r \exp(i\theta)$.

On peut donc écrire $\ln \left| \frac{R^3 + Z^3}{R^3 - Z^3} \right|^2 \simeq 4 \frac{r^3 \cos(3\theta)}{R^3}$ et donc $\ln \left| \frac{R^3 + Z^3}{R^3 - Z^3} \right| \simeq 2 \frac{r^3 \cos(3\theta)}{R^3}$.

On en déduit bien l'expression $V(r, \theta, z) \simeq \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \cos(3\theta)$, qui respecte les symétries étudiées précédemment : c'est une fonction paire, de période $\frac{2\pi}{3}$, qui prend une valeur constante

(nulle d'ailleurs) sur chacun des plans $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

□ 29. Considérons par exemple l'électrode impaire C_1 . Le potentiel au voisinage de C_1 est $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2RD_2^2}{aD_3^2} \right)$ puisque $D_4 = 2R$, avec aussi $D_2 = D_6 = |R + jR| = 2R \cos \frac{\pi}{3} = R$ et $D_3 = D_5 = |R - jR| = 2R \sin \frac{\pi}{3} = R\sqrt{3}$. Il vient donc

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2R}{3a}.$$

Les symétries déjà citées montrent que le potentiel des électrodes paires est $-V_0$.

□ 30. La capacité par unité de longueur est $C = \frac{3\lambda}{2V_0}$ soit

$$C = \frac{3\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2R}{3a}}$$

pour le système de trois paires d'électrodes en parallèle. On peut aussi remarquer l'expression du potentiel dans la partie centrale de l'hexapôle, $V \simeq \frac{2CV_0}{3\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \cos^3 \theta$.

□ 31. On trouve $C = 5,41 \times 10^{-11} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

II-B : Mouvement de molécules polaires (...)

□ 32. On sait que $E_p = -\vec{d} \cdot \vec{E} = -d_{\text{eff}} \|\vec{E}\|$.

□ 33. $\vec{E}(r, \theta, z) = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ prend, après calculs, la forme $\vec{E} = -\frac{3\lambda r^2}{\pi\epsilon_0 R^3} [\cos(3\theta)\vec{e}_r - \sin(3\theta)\vec{e}_\theta]$, donc $\|\vec{E}\| = \frac{3\lambda r^2}{\pi\epsilon_0 R^3}$ et

$E_p = -\frac{3\lambda d_{\text{eff}}}{\pi\epsilon_0 R^3} r^2$. Si d_{eff} est une constante, la force associée

est $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ donc $\vec{F} = \frac{6\lambda d_{\text{eff}}}{\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{e}_r$.

□ 34. En négligeant les autres forces, il vient $m\vec{r}'' = -K\vec{r}$ où

$K = -\frac{6\lambda d_{\text{eff}}}{\pi\epsilon_0 R^3}$. Le mouvement est périodique si $K > 0$ donc si

$d_{\text{eff}} < 0$; la fréquence angulaire (pulsation) associée est alors

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$. Pour les molécules ayant $d_{\text{eff}} > 0$, le mouvement

n'est pas borné : elles sont expulsées de la zone centrale du piège hexapolaire.

□ 35. $x = \frac{v_{0x}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), y = \frac{v_{0y}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), z = v_{0z} t + z_0$.

□ 36. L'hexapôle assure une sélection selon le moment dipolaire puisque les molécules présentant $d_{\text{eff}} > 0$ sont expulsées hors de l'appareil. Les autres entrent en $z = 0$ dans l'appareil avec une vitesse initiale \vec{v}_0 ; elles repassent par un point de l'axe (Oz) et sont donc refocalisées à l'instant t tel que $x = y = 0$, soit $t = \frac{\pi}{\omega_0}$. La distance ℓ de première refocalisation est alors la

valeur de z , soit $\ell = \frac{\pi v_{0z}}{\omega_0}$.

□ 37. La vitesse la plus probable v_p du jet correspond à un maximum de $\frac{dN}{dv}$, donc de $f(v) = v^3 \exp(-\beta v^2)$ où on a posé $\beta = \frac{m}{2k_B T}$. On obtient aisément $\frac{df}{dv} = \exp(-\beta v^2) [3v^2 - 2\beta v^4]$

donc $v_p = \sqrt{\frac{3}{2\beta}}$ soit $v_p = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$. La vitesse quadratique

moyenne v_q vérifie $\frac{1}{2} m v_q^2 = \frac{3}{2} k_B T$ donc $v_q = v_p$.

□ 38. $\omega_0 = \sqrt{\frac{12V_0 |d_{\text{eff}}|}{R^3 m \ln \frac{2R}{3a}}} = 1,04 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et

$\ell = \frac{\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 97,0 \text{ cm}$.