

SOLUTIONS PROPOSÉES POUR LE DEVOIR LIBRE N° 3B

Ce document comporte 10 pages.

PLASMONS DANS LES MÉTAUX

I. Oscillations électroniques dans les métaux

I-1. Modèle microscopique du mouvement des électrons

□ 1. La moyenne de la durée séparant deux chocs est  $\bar{t} = \int_0^\infty \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau \int_0^\infty x e^{-x} dx$  où une intégration par parties fournit  $\int_0^\infty x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$  donc  $\bar{t} = \tau$  : la durée moyenne entre deux chocs est bien égale à  $\tau$ . De même,  $\overline{t^2} = \int_0^\infty \frac{t^2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau^2 \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$  où on obtient encore une fois par intégration par parties  $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^\infty + 2 \int_0^\infty x e^{-x} dx = 2$  donc  $\overline{t^2} = 2\tau^2$ . On peut interpréter ce résultat en termes d'écart quadratique  $t_c$  pour la répartition des durées entre deux chocs, avec  $t_c^2 = \overline{(t - \tau)^2} = \overline{t^2} + \tau^2 - 2\tau\bar{t}$  donc  $t_c = \tau$  ; la durée  $\tau$  est donc à la fois la moyenne et l'écart quadratique moyen des répartitions des durées entre deux chocs.

□ 2. Après chaque choc, la direction de la vitesse  $\vec{v}$  est complètement aléatoire donc  $\overline{\vec{v}} = \vec{0}$ .

□ 3. Par définition,  $E = \frac{1}{2} m v_c^2$  donc  $v_c = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1,32 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette vitesse est très élevée, en particulier si on la compare aux vitesses macroscopiques du métal lui-même, et surtout aux vitesses quadratiques moyennes des molécules d'un gaz (de l'ordre de  $1000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  au maximum). Par contre, cette vitesse reste heureusement inférieure à la vitesse  $c$  de la lumière ( $v_c/c \sim 4 \times 10^{-3}$ ), permettant de continuer la description mécanique des électrons dans un cadre non relativiste.

□ 4. L'énergie thermique  $E_t = \frac{3}{2} k_B T = 3,8 \times 10^{-2} \text{ eV}$ , avec une vitesse thermique associée  $v_t = \sqrt{\frac{2E_t}{m}}$  ou  $v_t = 1,2 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , on a  $E \gg E_t$  et  $v_c/v_t \simeq 11$  donc l'énergie des électrons n'est pas d'origine thermique.

□ 5. Entre deux chocs, les électrons ne sont soumis qu'à la force électrique donc  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}_0$  qui s'intègre en  $\vec{v} = \vec{v}_q - \frac{e}{m} \vec{E}_0 (t - t_q)$ , ce qui mène immédiatement à  $\vec{v}_{q+1} - \vec{v}_q = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 (t_{q+1} - t_q)$ .

□ 6.  $\vec{v}_d = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 \overline{t_{q+1} - t_q}$  avec  $\overline{t_{q+1} - t_q} = \tau$  donc  $\vec{v}_d = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$ .

□ 7. Dans ce modèle,  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}_0 - \zeta \vec{v}$  ; en régime permanent (absence de chocs), atteint au bout d'une durée dont on verra qu'elle est de l'ordre de  $\tau$ , c'est-à-dire très brève, on obtient  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$  donc  $\vec{v}_d = -\frac{e}{\zeta} \vec{E}_0$ , identique à l'expression précédente sous réserve que  $\zeta = \frac{m}{\tau}$ .

□ 8.  $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$  donc la densité volumique de courants  $\vec{j} = -Ne\vec{v}$  vérifie  $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}_0$  avec  $\gamma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m}$ . Pour l'or,

$N = N_A \frac{d}{M} = 5,90 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  ce qui donne  $\tau = \frac{\gamma_0 m}{Ne^2} = 2,71 \times 10^{-14} \text{ s}$ . Cette courte durée justifie l'étude du seul régime permanent ci-dessus.

□ 9.  $v_d = \frac{e\tau}{m} E_0$  avec  $E_0 = 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  fournit  $v_d = 4,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .  $v_d \ll v_c$ , ce qui justifie le terme de dérive pour désigner ce mouvement moyen très lent, en comparaison de l'agitation macroscopique électronique à la vitesse quadratique moyenne  $v_c$ .

□ 10. On ne résout que dans le domaine  $0 \leq x \leq L_x$  puisqu'en dehors de cet intervalle, le modèle impose  $U(x) \rightarrow \infty$  donc  $f(x) = 0$ . L'équation de Schrödinger prend alors la forme  $\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{2mE_x}{\hbar^2} f(x) = -\alpha f(x)$ , où on notera que  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ . Selon le signe de  $\alpha$ , ce type d'équation a des solutions :

- exponentielles réelles, si  $\alpha < 0$ ; la double condition  $f(0) = f(L_x) = 0$  impose alors  $f(x) = 0$  partout et amène à rejeter cette solution;
- affines, si  $\alpha = 0$ ; ici encore, la double condition  $f(0) = f(L_x) = 0$  impose alors  $f(x) = 0$  partout et amène à rejeter cette solution;
- sinusoidales si  $\alpha > 0$ ; c'est le seul cas compatible avec la double condition aux limites.

Finalement, la seule solution acceptable est ici du type  $f(x) = f_0 \sin(K_x x) + f_1 \cos(K_x x)$  mais  $f(0) = 0$  impose  $f_1 = 0$  et on aura bien  $f(x) = f_0 \sin(K_x x)$ .

□ 11. De façon évidente,  $K_x$  est l'inverse d'une longueur; on a vu que  $K_x^2 = \alpha = \frac{2mE_x}{\hbar^2}$  soit  $E_x = \frac{\hbar^2 K_x^2}{2m}$ .

□ 12. Il reste à exploiter la dernière condition aux limites  $f(L_x) = 0$  pour cette solution (dont on notera l'analogie avec une onde stationnaire dans une cavité de longueur  $L_x$ ), qui mène à  $\sin(K_x L_x) = 0$  donc  $K_x = \frac{p\pi}{L_x}$ , où  $p$  est un entier. On a vu que  $p = 0$ , correspondant à  $K_x = 0$ , doit être rejetée; de plus, les solutions correspondant à deux entiers  $p$  et  $-p$  sont identiques (au changement de signe de  $f_0$  près) et on peut se restreindre sans perte de généralité à  $p > 0$ , donc enfin  $p \in \mathbb{N}^*$ .

□ 13. Les résultats sont évidemment analogues pour les axes  $(Oy)$  et  $(Oz)$ , menant à  $g(y) = g_0 \sin(K_y y)$  et  $h(z) = h_0 \sin(K_z z)$ ; posant  $\psi_0 = f_0 g_0 h_0$ , il vient  $\psi(x, y, z) = \psi_0 \sin(K_x x) \sin(K_y y) \sin(K_z z)$  avec pour expressions énergétiques associées  $E_y = \frac{\hbar^2 K_y^2}{2m}$ ,  $E_z = \frac{\hbar^2 K_z^2}{2m}$  et pour conditions de quantification  $K_y = \frac{q\pi}{L_y}$ ,  $K_z = \frac{r\pi}{L_y}$  où  $(q, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .

□ 14. On déduit directement de ce qui précède  $E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{p^2}{L_x^2} + \frac{q^2}{L_y^2} + \frac{r^2}{L_z^2} \right)$ .

□ 15. Si on trace les vecteurs  $\vec{K}$  depuis une origine commune à l'origine des coordonnées, leurs extrémités sont disposées aux nœuds d'un réseau tridimensionnel dont l'extrémité numérotée  $(p, q, r)$  est au point de coordonnées  $(p\Delta K_x, q\Delta K_y, r\Delta K_z)$ , avec  $\Delta K_x = \frac{\pi}{L_x}$ ,  $\Delta K_y = \frac{\pi}{L_y}$ ,  $\Delta K_z = \frac{\pi}{L_z}$ . Un tel réseau est formé de parallélépipèdes de volume  $\Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z$  contenant chacun exactement un nœud du réseau; on peut donc bien affirmer que le volume occupé par un état électronique est  $\Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z = \frac{\pi^3}{L_x L_y L_z}$ , puisqu'un état électronique est entièrement défini par le vecteur  $\vec{K}$ .

□ 16. L'ensemble des états d'énergie  $\varepsilon \leq E$  donc de vecteur d'onde  $\vec{k}$  vérifiant  $\|\vec{k}\| \leq K$  correspond à la partie de la sphère de rayon  $K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}$  avec  $\kappa_x > 0$ ,  $\kappa_y > 0$  et  $\kappa_z > 0$ . Il s'agit donc d'un huitième de sphère de rayon  $K$ , et de volume  $\frac{1}{8} \frac{4\pi K^3}{3}$ .

Pour ce qui concerne les états d'énergie  $E$  à  $dE$  près, le volume concerné s'écrit  $\frac{1}{8} 4\pi K^2 dK$ . Le volume occupé par un état étant  $\Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z$ , le nombre d'états décrit ici est  $dn = \frac{2 \times \frac{1}{8} 4\pi K^2 dK}{\Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z}$  soit  $dn = \frac{K^2 dK}{\pi^2 L_x L_y L_z}$ . On remarque qu'on a remplacé un décompte exact des états par une approximation continue, ce qui est justifié par l'hypothèse  $\Delta K \ll dK$  proposée par l'énoncé.

□ 17. L'intégration du résultat précédent fournit  $n(K) = \frac{K^3}{3\pi^2} L_x L_y L_z$  ou, avec le changement de variable  $K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}$ ,  $n(E) = \frac{(2mE)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^2} L_x L_y L_z$ .

□ 18. Le dernier niveau occupé correspond à la valeur de  $E$  telle que  $n(E) = N L_x L_y L_z$  (nombre total d'électrons dans le métal); on a donc  $N = \frac{(2mE)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^2}$  donc  $E_F = (3\pi^2 N)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}$  ou  $E_F = 5,54 \text{ eV}$ ; ce modèle permet donc de rendre compte de l'énergie cinétique des électrons, qui n'est pas liée à l'agitation thermique mais bien à la localisation des électrons dans un volume restreint de l'espace, du fait de leur interaction avec le réseau périodique des ions du métal.

**I-2. Plasmons dans le métal**

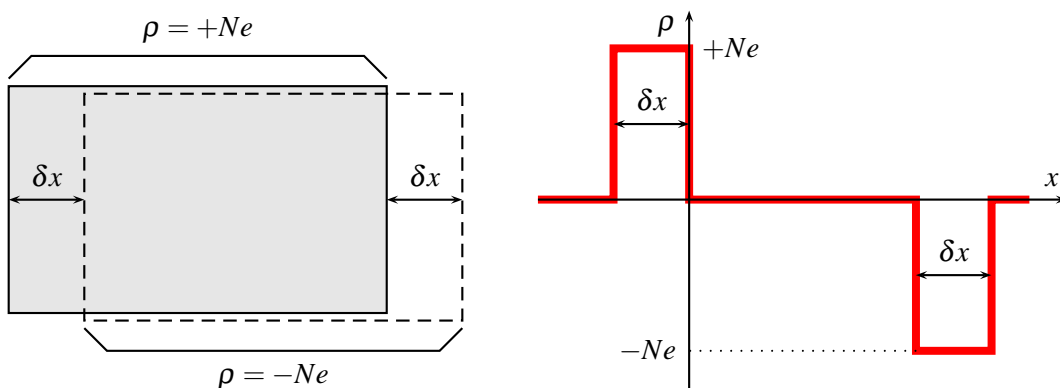
□ 19.  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  (équation de Maxwell–Ampère) et  $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  (conservation de la charge électrique) mènent, compte tenu de  $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$  (sous réserve qu'on puisse négliger le régime transitoire de durée  $\sim \tau$ ) à  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\epsilon_0} \rho = 0$  ou  $\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0)e^{-t/\tau_r}$  avec pour constante de temps de relaxation des charges  $\tau_r = \frac{\epsilon_0}{\gamma_0} = 1,94 \times 10^{-19} \text{ s}$ . Cette durée très courte justifie le modèle de conducteur partout localement neutre qu'on emploie dans la suite. Toutefois, le modèle développé ici n'est pas complètement justifié puisque  $\tau_r \ll \tau$ , ce qui ne valide pas l'emploi de l'équation de régime permanent  $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}_0$ .

□ 20.  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$  fournit, en régime harmonique forcé de pulsation  $\omega$ ,  $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \frac{\vec{E}}{1+i\omega\tau}$  donc  $\vec{j} = -Ne\vec{v}$  prend bien la forme  $\vec{j} = \gamma(\omega)\vec{E}$  avec  $\gamma(\omega) = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau}$ .

□ 21. L'équation de conservation de la charge  $\text{div}(\gamma(\omega)\vec{E}) = -i\omega\rho$  s'écrit, compte tenu de l'expression de  $\gamma(\omega)$  et que  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , sous la forme  $\frac{\gamma_0}{\epsilon_0}\rho = -i\omega\rho + \omega^2\tau\rho$  ou, en revenant aux notations différentielles  $i\omega = \frac{d}{dt}$ ,  $\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{dt} + \omega_p^2\rho = 0$ . Le discriminant de l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle linéaire est  $\Delta = -4\omega_p^2 + \frac{1}{\tau^2}$ , que l'on peut aussi écrire  $\Delta = \frac{1-4\tau/\tau_p}{\tau^2}$ . Comme on a vu que  $\tau \gg \tau_p$ ,  $\Delta$  est franchement négatif, les solutions de l'équation sont complexes conjuguées et le régime est **pseudopériodique amorti** avec des solutions du type  $\rho(t) = \rho_0 e^{-t/2\tau} \cos(\sqrt{\omega_p^2 - 1/4\tau^2}t + \varphi)$ ; le temps de décroissance associé est  $\tau_d = 2\tau$  et la pseudopulsation des oscillations est  $\omega = \sqrt{\omega_p^2 - 1/4\tau^2} \simeq \omega_p$ .

□ 22. On a vu que  $\omega_p \gg \frac{1}{\tau_d}$  (ou encore  $2\pi/\omega_p \ll \tau_d$ ): la décroissance de l'amplitude des oscillations est donc très lente et le régime **très faiblement amorti**; il y a beaucoup d'oscillations avant amortissement.

□ 23. Les ions sont considérés comme fixes car leur masse  $m_i$  vérifie  $m_i \gg m$  (avec au moins un rapport de l'ordre de 2000 pour les ions les plus légers,  $H^+$ ). On peut alors représenter un déplacement en bloc d'un groupe d'électrons (densité volumique  $\rho = -Ne$ ) sur un fond d'ions fixes ( $\rho = +Ne$ ) menant la densité volumique de charges représentée ci-dessous.



Par raisons de symétrie,  $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$  et  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  donc  $\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ; cette équation s'intègre (avec  $E = 0$  à l'extérieur du milieu chargé) pour donner  $\vec{E} = \frac{Ne}{\epsilon_0} \delta x \vec{e}_x$  à l'intérieur du milieu chargé.

□ 24.  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$  donc, en projection sur  $\vec{e}_x$ ,  $m\ddot{\delta x} = -\frac{Ne^2}{\epsilon_0} \delta x$ , équation d'oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$ , avec  $\frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = \frac{Ne^2\tau}{m} \frac{1}{\tau\epsilon_0} = \frac{\gamma_0}{\epsilon_0\tau}$ : la pulsation des oscillations est  $\omega_p$  déterminée plus haut.

## II. Couplage champ-plasma

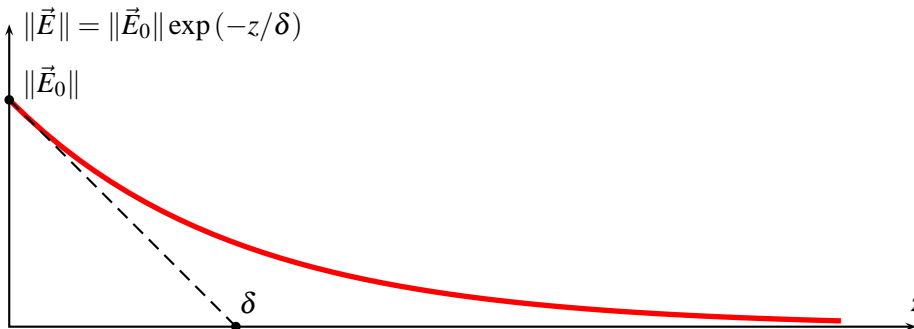
### II-1. Propagation dans un métal

□ 25. Le milieu reste neutre ( $\rho = 0$ ) et on adopte un modèle ohmique à conductivité complexe qui suppose implicitement une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$  et une dépendance spatiale en  $\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r})$  donc les équations de Maxwell s'écrivent  $\text{div}\vec{E} = 0$  ou  $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$ ,  $\text{div}\vec{B} = 0$  ou  $\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$ ,  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  ou  $\vec{k}\wedge\vec{E} = \omega\vec{B}$  et  $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$  ou  $\vec{k}\wedge\vec{B} = -\frac{\omega}{c^2}\vec{E}\left[1 - i\frac{\gamma(\omega)}{\omega\epsilon_0}\right]$ . On en déduit sans difficulté pour  $\vec{E} \neq \vec{0}$  que  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\frac{\gamma(\omega)}{\omega\epsilon_0}\right)$ .

□ 26. On peut écrire  $\gamma(\omega) \simeq \gamma_0$  pour  $\omega\tau \ll 1$  donc aussi pour les grandes longueurs d'onde puisque  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \ll \frac{1}{\tau}$  correspond aussi à  $\lambda \gg 2\pi c\tau$  soit  $\lambda \gg 51 \times 10^{-6} \text{ m}$  : cette approximation s'applique pour l'infrarouge lointain, les ondes centimétriques (hyperfréquences), les ondes radio.

□ 27.  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\frac{\gamma_0}{\omega\epsilon_0}\right)$  où on remarque que  $\frac{\gamma_0}{\omega\epsilon_0} = \frac{1}{\omega\tau} \gg \frac{1}{\omega\tau}$  ; la condition  $\omega\tau \gg 1$  permet *a fortiori* de considérer que  $\frac{\gamma_0}{\omega\epsilon_0} \gg 1$  donc de négliger le terme réel dans l'équation de dispersion (ou, ce qui revient au même, le courant de déplacement  $\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$  devant le courant de conduction  $\vec{j}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère). On obtient alors  $k^2 = -i\frac{\gamma_0\omega}{\epsilon_0 c^2}$  dont les solutions complexes  $k = \pm \frac{1-i}{\delta}$  traduisent une absorption sur une longueur caractéristique  $\delta = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 c^2}{\gamma_0 \omega}}$

ou  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$  (appelé épaisseur de peau du conducteur) puisque  $\exp(-ikz) = \exp(-iz/\pm\delta)\exp(-z/\pm\delta)$  ; on a exclu ici la solution correspondant au signe  $-$  puisque la propagation dans un milieu illimité vers les  $z > 0$  conduirait à une onde dont l'amplitude croît indéfiniment, ce qui n'est pas physique en l'absence d'apport énergétique. Finalement, on peut proposer le tracé ci-dessous :



avec numériquement  $\delta = 1,06 \text{ cm}$  pour  $f = 50 \text{ Hz}$  et  $\delta = 7,46 \mu\text{m}$  pour  $f = 100 \text{ MHz}$ .

□ 28. Si  $\omega\tau \gg 1$  alors  $\gamma(\omega) \simeq \frac{\gamma_0}{i\omega\tau}$  et l'équation de dispersion devient  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$  en fonction de  $\omega_p$  déjà défini plus haut (identique au cas des plasmas gazeux). La condition de propagation (transparence du milieu) est alors  $k \in \mathbb{R}^*$  donc  $k^2 > 0$  soit  $\omega > \omega_p$ .

□ 29. Si  $\omega < \omega_p, k^2 < 0$  donc  $k = \pm \frac{i}{\delta_p}$  où  $\delta_p = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$  désigne ici encore la distance caractéristique d'atténuation

de l'onde dans le milieu. En choisissant  $\lambda = 500 \text{ nm}$  (comme plus bas dans l'énoncé, couleur bleu-vert),  $\omega = 3,77 \times 10^{15} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $\omega_p = 1,37 \times 10^{16} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  fournissent  $\delta_p = 2,25 \times 10^{-8} \text{ m}$ . L'onde est évanescence et s'atténue sur une épaisseur équivalente à quelques centaines d'épaisseurs atomiques seulement : un métal est parfaitement opaque dans le domaine visible.

### II-2. Plasmons de surface sur un métal

□ 30. Dans l'air, et en adoptant toujours la notation  $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$  pour une onde harmonique, on obtient  $\text{div}\vec{\mathcal{E}}_1 = 0$ ,  $\text{div}\vec{\mathcal{B}}_1 = 0$ ,  $\text{rot}\vec{\mathcal{E}}_1 = -i\omega\vec{\mathcal{B}}_1$  et  $\text{rot}\vec{\mathcal{B}}_1 = i\omega\epsilon_0\mu_0\vec{\mathcal{E}}_1$ . Dans le métal, qui reste partout localement neutre ( $\rho =$

0) mais conducteur avec la conductivité complexe  $\gamma(\omega)$ , il vient  $\boxed{\operatorname{div} \vec{\mathcal{E}}_2 = 0}$ ,  $\boxed{\operatorname{div} \vec{\mathcal{B}}_2 = 0}$ ,  $\boxed{\operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}}_2 = -i\omega \vec{\mathcal{B}}_2}$  et  $\boxed{\operatorname{rot} \vec{\mathcal{B}}_2 = i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{\mathcal{E}}_2 + \epsilon_0 \gamma(\omega) \vec{\mathcal{E}}_2}$ .

□ 31. On peut ici écrire  $\operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}}_\ell = \begin{vmatrix} -ik_x & \mathcal{E}_{\ell x} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \mathcal{E}_{\ell z} \end{vmatrix} \wedge$  donc  $\boxed{\vec{\mathcal{B}}_\ell = \frac{i\frac{\partial \mathcal{E}_{\ell z}}{\partial z} - k_x \mathcal{E}_{\ell z}}{\omega} \vec{e}_y}$  : le champ magnétique est bien co-

linéaire à  $(Oy)$ . Pour appliquer de même l'équation de Maxwell–Ampère, on peut remarquer que  $i\omega \epsilon_0 \mu_0 + \epsilon_0 \gamma(\omega) = i\omega \epsilon_2 \mu_0$  et on peut donc adopter l'écriture  $\operatorname{rot} \vec{\mathcal{B}}_\ell = i\omega \epsilon_\ell \mu_0 \vec{\mathcal{E}}_\ell$ , indépendante du milieu étudié. La projection sur  $\vec{e}_z$  de

cette équation s'écrit  $k_x \mathcal{B}_{\ell y} = -\omega \epsilon_\ell \mu_0 \mathcal{E}_{\ell z}$ , ce qui permet d'écrire le système  $\begin{cases} \omega \mathcal{B}_{\ell y} + k_x \mathcal{E}_{\ell z} & = -i\frac{\partial \mathcal{E}_{\ell x}}{\partial z} \\ k_x \mathcal{B}_{\ell y} + \omega \epsilon_\ell \mu_0 \mathcal{E}_{\ell z} & = 0 \end{cases}$  ;

la solution de ce système linéaire exprime les composantes  $\mathcal{B}_{\ell y}$  et  $\mathcal{E}_{\ell z}$  en fonction seulement de  $E_{\ell x}$  : la résolution du problème se ramène bien à la  $\boxed{\text{détermination de } E_{\ell x}(z)}$ .

□ 32. On a établi  $\omega \mathcal{B}_{\ell y} + k_x \mathcal{E}_{\ell z} = -i\frac{dE_{\ell x}}{dz}$  ou, après dérivation,  $\omega \frac{d\mathcal{B}_{\ell y}}{dz} + k_x \frac{d\mathcal{E}_{\ell z}}{dz} = -i\frac{d^2 E_{\ell x}}{dz^2}$ . Écrivant alors l'équation de Maxwell–Gauss  $\operatorname{div} \vec{\mathcal{E}}_\ell = 0$ , on obtient  $-ik_x \mathcal{E}_{\ell x} + \frac{\partial \mathcal{E}_{\ell z}}{\partial z} = 0$  donc  $\frac{d\mathcal{E}_{\ell z}}{dz} = ik_x E_{\ell x}$ , tandis que la projection sur  $\vec{e}_x$  de l'équation de Maxwell–Ampère fournit  $-\frac{\partial \mathcal{B}_{\ell y}}{\partial z} = i\omega \epsilon_\ell \mu_0 \mathcal{E}_{\ell x}$  donc  $\frac{d\mathcal{B}_{\ell y}}{dz} = -i\omega \epsilon_\ell \mu_0 E_{\ell x}$ . Reportant enfin ces deux termes

dans la relation établie ci-dessus par dérivation, il vient comme demandé  $\boxed{\frac{d^2 E_{\ell x}}{dz^2} - (k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_\ell) E_{\ell x} = 0}$ . Enfin, si

$\omega \tau \gg 1$ ,  $\epsilon_2 \simeq \epsilon_0 - \frac{i\gamma_0}{\omega}$  s'écrit  $\epsilon_2 = \epsilon_0 - \frac{\gamma_0}{\omega^2 \tau}$  ou encore  $\boxed{\epsilon_2 = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \in \mathbb{R}}$ .

□ 33. Les formes  $\exp(\pm z/\delta_\ell)$  proposées par l'énoncé sont solutions de l'équation établie ci-dessus sous réserve que  $\boxed{\delta_\ell^2 = \frac{1}{k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_\ell}}$  ; on remarquera que cette équation ne préjuge pas du signe de  $\delta_\ell^2$  et la grandeur  $\delta_\ell$  est soit réelle, soit imaginaire pure.

□ 34. Des ondes de surface confinées au voisinage du plan  $z = 0$  imposent  $\boxed{\delta_\ell \text{ réel}}$ , en ne conservant que les solutions qui vérifient  $|E_{1x}| \rightarrow 0$  si  $z \rightarrow -\infty$  et  $|E_{2x}| \rightarrow 0$  si  $z \rightarrow +\infty$  ; on aura donc  $\boxed{E_{1x}(z) = \alpha_1 e^{z/\delta_1} \text{ et } E_{2x}(z) = \beta_2 e^{-z/\delta_2}}$ . On verra plus bas que  $\alpha_1 = \beta_2$  du fait des relations de passage du champ.

□ 35. On a vu que  $\frac{d\mathcal{B}_{\ell y}}{dz} = -i\omega \epsilon_\ell \mu_0 E_{\ell x}$  d'où  $\frac{dB_{1y}}{dz} = -i\omega \epsilon_\ell \mu_0 E_{1x}$  et, par intégration et en l'absence de terme constant (puisque tous les champs sont proportionnels entre eux),  $\boxed{B_{1y} = -i\omega \epsilon_1 \mu_0 \delta_1 \alpha_1 e^{z/\delta_1}}$  ; on obtient de la même façon

$\boxed{B_{2y} = i\omega \epsilon_2 \mu_0 \delta_2 \beta_2 e^{-z/\delta_2}}$ . On a aussi vu que  $-\omega \epsilon_\ell \mu_0 \mathcal{E}_{\ell z} = k_x \mathcal{B}_{\ell y}$  donc  $\boxed{E_{1z} = ik_x \delta_1 \alpha_1 e^{z/\delta_1}}$  et  $\boxed{E_{2z} = -ik_x \delta_2 \beta_2 e^{-z/\delta_2}}$ .

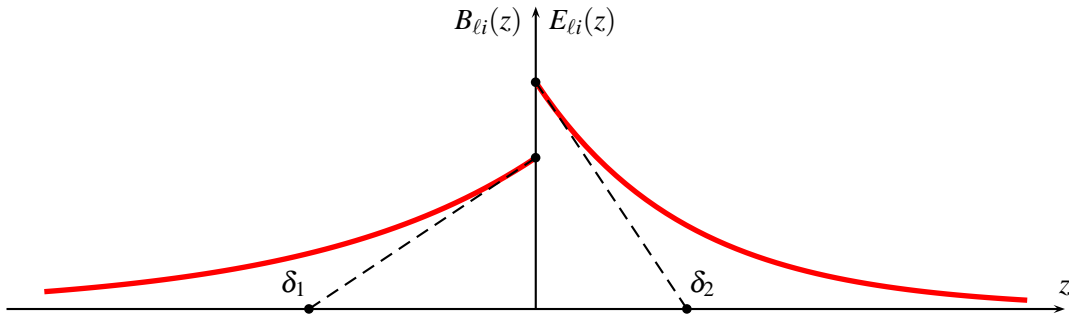
On peut encore écrire  $\vec{\mathcal{E}}_1 = \alpha_1 e^{z/\delta_1} e^{i(\omega t - k_x x)} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ ik_x \delta_1 \end{vmatrix}$  ; avec  $\frac{1}{\delta_1} < k_x$ , on reconnaît une polarisation  $\boxed{\text{elliptique}}$  de

grand axe  $(Oz)$  et de petit axe  $(Ox)$ . Il n'est pas possible ici de lui attribuer un sens (droite ou gauche) car le plan  $(xOz)$  n'est pas orienté par la polarisation de l'onde. Le champ tourne de l'axe  $(Oz)$  vers l'axe  $(Ox)$  puisque

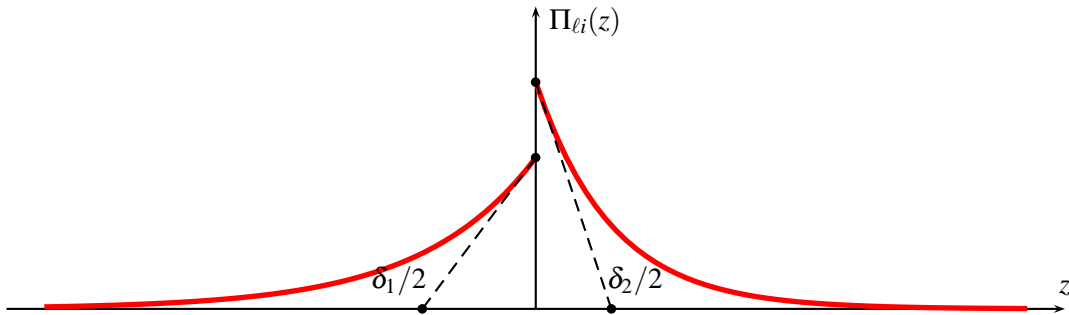
$\operatorname{Re}(\vec{\mathcal{E}}_1) = \alpha_1 e^{z/\delta_1} [\cos(\omega t - k_x x) \vec{e}_x - k_x \delta_1 \sin(\omega t - k_x x) \vec{e}_z]$ . De même, dans le métal,  $\vec{\mathcal{E}}_2 = \beta_2 e^{-z/\delta_2} e^{i(\omega t - k_x x)} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -ik_x \delta_2 \end{vmatrix}$

et on reconnaît aussi une polarisation avec les mêmes axes mais un sens de rotation inversé.

□ 36. Pour chacune des composantes du champ, la représentation est la même : une décroissance exponentielle conforme à la figure ci-dessous, avec  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  donc  $\delta_2 < \delta_1$ . Le tracé ne tient pas compte de l'éventuelle continuité de certaines composantes du champ.



Par ailleurs,  $\langle \vec{\Pi}_\ell \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \text{Re}(\vec{\mathcal{E}}_\ell) \wedge \text{Re}(\vec{\mathcal{B}}_\ell) \rangle$  ou encore  $\langle \vec{\Pi}_\ell \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{\mathcal{E}}_\ell \wedge \vec{\mathcal{B}}_\ell^*)$  qui s'écrit aussi, par exemple dans l'air,  $\langle \vec{\Pi}_1 \rangle = \frac{\alpha_1^2}{2\mu_0} e^{2z/\delta_1} \text{Re} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i\omega\epsilon_1\mu_0\delta_1 \\ ik_x\delta_1 & 0 \end{vmatrix}$  ou enfin  $\langle \vec{\Pi}_1 \rangle = \frac{\alpha_1^2\epsilon_1\omega k_x\delta_1^2}{2} \vec{e}_x$ ; de même, on obtient  $\langle \vec{\Pi}_2 \rangle = \frac{\beta_2^2\epsilon_2\omega k_x\delta_2^2}{2} \vec{e}_x$ . Ces deux grandeurs sont **indépendantes de x** (l'onde de surface se propage sans atténuation le long de l'interface) et leur dépendance en  $z$  est analogue de celle des champs, avec toutefois une atténuation deux fois plus rapide (l'onde est localisée au voisinage de l'interface) :



□ 37. La composante tangentielle du champ électrique  $\mathcal{E}_x$  est continue à la traversée de la surface de séparation, donc  $\alpha_1 = \beta_2$ . La composante tangentielle du champ magnétique  $\mathcal{B}_y$  est continue en l'absence de courants surfaciques, donc  $\epsilon_1\alpha_1\delta_1 = -\epsilon_2\beta_2\delta_2$ . On en déduit  **$\epsilon_1\delta_1 + \epsilon_2\delta_2 = 0$** . Comme  $\epsilon_1 = \epsilon_0 > 0$  et les distances  $\delta_\ell$  étant par hypothèse positives, on a  **$\epsilon_2 < 0$** .

□ 38. Les relations  $\frac{1}{\delta_\ell^2} = k_x^2 - \omega^2\mu_0\epsilon_\ell$  permettent d'écrire  $\frac{1}{\epsilon_\ell^2\delta_\ell^2} = \frac{k_x^2}{\epsilon_\ell^2} - \frac{\omega^2\mu_0}{\epsilon_\ell}$ ; ces deux termes (pour  $\ell = 1, 2$ ) sont égaux au vu de la question précédente, donc  $k_x^2 \left( \frac{1}{\epsilon_1^2} - \frac{1}{\epsilon_2^2} \right) = \omega^2\mu_0 \left( \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right)$  ou, après une dernière simplification,  **$k_x^2 = \omega^2\mu_0 \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$** .

□ 39. Remplaçant  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$  et  $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$ , il vient ici  **$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}$** . La propagation n'est possible que si  $k_x^2 > 0$ ; l'étude de la fonction  $x \mapsto f(x) = \frac{x-1}{x-2}$  montre que  $f(x) > 0$  pour  $0 < x < 1$  et  $2 < x$ ; finalement, les deux domaines de fréquence compatibles avec la propagation sont  **$0 < \omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$  et  $\omega > \omega_p$** . On s'intéresse dans ce qui suit au premier domaine (basses fréquences) pour lequel le métal est opaque aux ondes se propageant en volume.

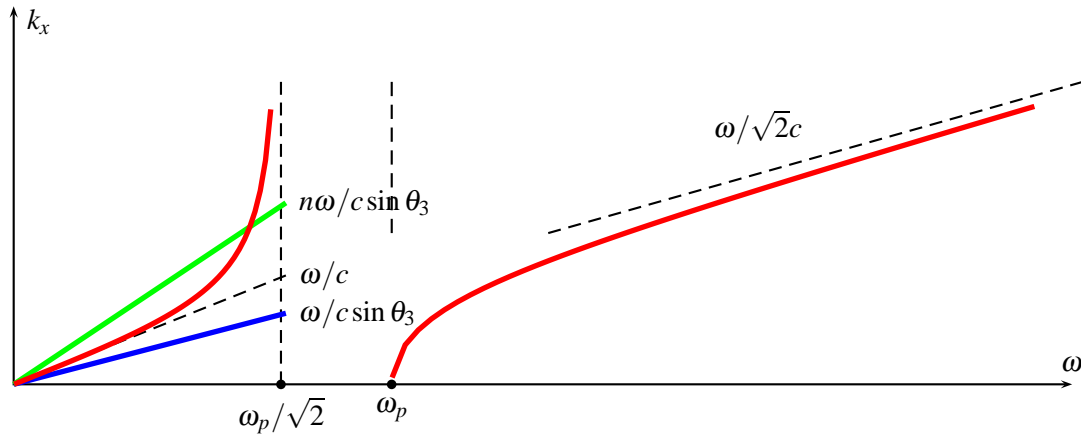
En particulier, pour  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , on a vu que  $3,77 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = \omega < \omega_p = 1,37 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , et même  $\omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$ .

On peut aisément revenir aux expressions précédentes de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  qui fournissent  **$\delta_1 = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 2} = 266 \text{ nm}$**  et

$$\delta_2 = \frac{\delta_1}{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = 21,8 \text{ nm}.$$

□ 40. Le tracé de  $k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}}$  ci-dessous fait apparaître les comportements limites  **$k_x \simeq \frac{\omega}{c}$  si  $\omega \ll \omega_p$**  (à très

basse fréquence, le milieu se comporte comme le vide) et  $k_x \simeq \frac{\omega}{\sqrt{2}c}$  si  $\omega \gg \omega_p$  : la vitesse de phase de l'onde est alors  $v\varphi \simeq \sqrt{2}c > c$ .



□ 41. Si  $\omega \rightarrow \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$ ,  $k_x \rightarrow \infty$ ; comme par ailleurs  $\frac{1}{\delta_\ell^2} = k_x^2 - \omega\mu_0\varepsilon_\ell$  où  $\omega\mu_0\varepsilon_\ell$  reste fini, on en déduit que  $\delta_\ell \rightarrow 0$ , avec plus précisément  $\delta_\ell^2 k_x^2 = 1 + \omega\mu_0\varepsilon_\ell \delta_\ell^2 \rightarrow 1$ . On en déduit que  $\begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1z} \end{bmatrix} = +i$  et  $\begin{bmatrix} E_{2x} \\ E_{2z} \end{bmatrix} = -i$ ; dans les deux cas, la polarisation elliptique devient circulaire.

### II-3. Excitation des plasmons de surface

#### II-3.1. Couplage par réflexion

□ 42. La continuité d'une composante des champs à l'interface s'écrit  $E_{3i}e^{-i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}} + E'_{3i}e^{-i\vec{k}'_3 \cdot \vec{r}} - E_{2i}e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} = 0$  pour tout  $\vec{r} \in (xOy)$ . Cette combinaison linéaire de trois fonctions de  $\vec{r} = (x, y, 0)$  ne peut être constamment nulle avec  $E_{3i}$ ,  $E'_{3i}$  et  $E_{2i}$  non tous nuls que si les fonctions exponentielles sont proportionnelles. Comme ces trois fonctions ont même valeur en  $(x=0, y=0)$ , elles sont aussi forcément égales ce qui impose  $k'_{3y} = k_{2y} = k_{3y} = 0$  puisque l'onde incidente se propage dans le plan  $(xOz)$ . Ainsi, les vecteurs  $\vec{k}_3$ ,  $\vec{k}'_3$  et  $\vec{k}_2$  sont coplanaires dans le plan d'incidence; pour la même raison, ces vecteurs d'onde vérifient la continuité de leurs composantes tangentes,  $k_{3x} = k'_{3x} = k_{2x}$ .

□ 43. Dans l'air,  $\|\vec{k}_3\| = \frac{\omega}{c}$  donc  $k_{3x} = \frac{\omega}{c} \sin \theta_3 < \frac{\omega}{c}$ ; comme par ailleurs  $k_{2x} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}}$  a été tracé sur la figure ci-dessus, on constate sans difficulté qu'il n'y a aucune intersection entre une courbe entièrement située au-dessus de la droite  $k_x = \omega/c$  (en pointillés ci-dessus) et une autre droite (en traits plein bleu ci-dessus) située en dessous de celle-ci. L'onde propagative du milieu 3 ne peut donc pas exciter l'onde de surface.

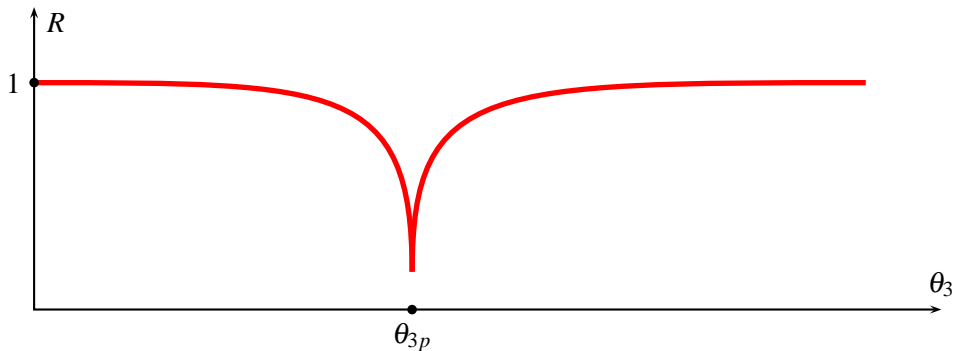
□ 44. Si on a maintenant  $k_{3x} = n_3 \frac{\omega}{c} \sin \theta_3$ , on constate (cf. figure ci-dessus, droite en trait plein vert) qu'il est possible d'exciter l'onde de surface si  $\sin \theta_3 > \frac{1}{n_3}$ , c'est-à-dire pour une incidence supérieure à l'angle d'incidence limite de la réflexion « classique ».

□ 45. Égalant les deux expressions de  $k_x$ , il vient  $\sin \theta_{3p} = \frac{1}{n_3} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}}$  ou, ici,  $\theta_{3p} = 42^\circ 38'$ . Si l'onde de surface est excitée, le coefficient de réflexion est fortement diminué pour  $\theta_3 = \theta_{3p}$  : c'est l'onde incidente qui fournit l'énergie ainsi absorbée, énergie qui n'est plus disponible pour la réflexion.

Il faut pour assurer le confinement que l'épaisseur du métal soit nettement supérieure à la distance caractéristique  $\delta_2$  évaluée plus haut; sinon, une partie de l'onde de surface pourrait être retransmise de l'autre côté de la surface métallique. On doit donc imposer  $e \gg \delta_2 \sim 20 \text{ nm}$ .

□ 46. Pour toute autre incidence, il n'y a pas d'excitation d'onde de surface; de plus,  $\omega < \omega_p/\sqrt{2} < \omega_p$  donc le métal est un milieu opaque et il n'y a pas transmission d'onde propagative non plus. Finalement, toute l'énergie de

l'onde incidente doit se retrouver dans l'onde réfléchie et il y a **réflexion totale** pour  $\theta_3 \neq \theta_{3p}$ . Puisque  $k'_{3x} = k_{3x}$  et  $\|\vec{k}'_3\| = \|\vec{k}_3\|$ , la seule solution possible est  $k'_{3z} = -k_{3z}$  : le vecteur  $\vec{k}'_3$  est symétrique du vecteur  $\vec{k}_3$  par rapport au plan du miroir, conformément aux **lois de Descartes** de la réflexion. On peut s'attendre à une mesure du type de la figure proposée ci-dessous.



□ 47. Posant  $\varepsilon_1 = n^2 \varepsilon_0$ , il vient  $k_x^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - (n^2 + 1)\omega^2}$  et la continuité de la composante tangentielle du vecteur

d'onde impose encore  $\sin \theta_{3p} = \frac{n}{n_3} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - (n^2 + 1)\omega^2}}$ .

□ 48.  $\left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right| = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \gg n^2$  permet de négliger le terme en  $n^2$  sous le radical de l'expression précédente, donc

$\sin \theta_{3p} \simeq \frac{n}{n_3}$  et  $\frac{d\theta_{3p}}{dn} = \frac{1}{n_3 \cos \theta_{3p}} = \frac{1}{n_3 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{3p}}}$  donc après simplification  $\frac{d\theta_{3p}}{dn} = \frac{1}{\sqrt{n_3^2 - n^2}}$ . Assimilant les varia-

tions minimales à des différentielles, on obtient  $dn_{\min} = \sqrt{n_3^2 - n^2} d\theta_{3p} \sim 1,4 \times 10^{-5}$ .

□ 49. Dans un interféromètre de Michelson, la présence d'une lame d'épaisseur  $e$  sur un des bras de l'interféromètre introduit un déphasage  $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}(n-1)e$  ; une petite variation de ce déphasage s'écrit donc  $d\Delta\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda} dn$  et la mesure

proposée est possible si  $e > e_{\min} = \frac{\lambda d\Delta\varphi_{\min}}{4\pi dn_{\min}} = 0,3 \mu\text{m}$  ; c'est une valeur difficile à réaliser qui justifie le choix de la méthode de mesure proposée par Kreschmann.

□ 50. Du fait que  $\bar{c} = C/M$ , où  $M$  est la masse molaire,  $C$  la concentration massique et  $\bar{c}$  la concentration molaire

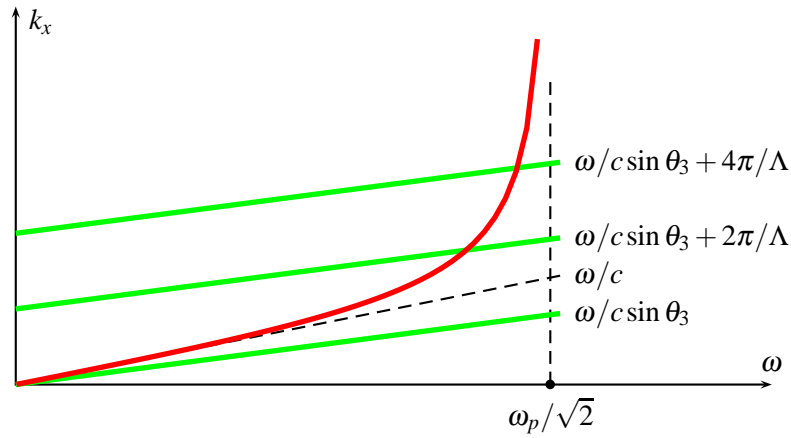
volumique, on écrit ici  $d\bar{c}_{\min} = \frac{dn_{\min}}{M \frac{dC}{dC}} = 2,3 \times 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  ; on peut ainsi détecter des quantités très faibles de molécules d'ADN par ce procédé.

### II-3.2. Couplage par diffraction

□ 51. Les ordres du réseau sont les **maxima principaux** de la figure de diffraction, réalisés lorsque la différence de marche  $\delta$  entre les rayons diffractés par deux traits consécutifs du réseau vaut  $\delta = q\lambda = q \frac{2\pi c}{\omega}$ ,  $q$  étant un entier. Dans la diffraction par un réseau plan par réflexion de période  $\Lambda$ , on peut écrire  $\delta = \Lambda(\sin \theta_q - \sin \theta_3)$  et la condition de formation d'un maximum (relation fondamentale des réseaux ou relation de Bragg) peut s'écrire  $\Lambda(\sin \theta_q - \sin \theta_3) = q\lambda$  ou encore  $\frac{\omega}{c}(\sin \theta_q - \sin \theta_3) = q \frac{2\pi}{\Lambda}$ . Reconnaisant enfin  $k_{xq} = \frac{\omega}{c} \sin \theta_q$  pour la projection tangentielle du vecteur

d'onde dirigeant l'ordre  $q$ , on vérifie bien  $k_{xq} = \frac{\omega}{c} \sin \theta_3 + q \frac{2\pi}{\Lambda}$ . Reprenant le principe de la résolution graphique

déjà développé (cf. ci-dessous), on voit que pour toute valeur de  $q > 0$ , il existe une **solution unique** au problème du couplage, c'est-à-dire une valeur de  $\omega$  dans  $]0, \omega_p/\sqrt{2}[$  qui assure  $k_{xq}(\omega) = k_x(\omega)$ .



Avec les valeurs numériques proposées, on trouve  $q \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{\omega}{c} \left( \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}} - \sin \theta_3 \right)$  où  $q \geq 1$ , ce qui impose encore

$$\Lambda = q \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2} - \sin \theta_3}} \geq \Lambda_{\min} \text{ avec } \Lambda_{\min} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2} - \sin \theta_3}} = 1,48 \mu\text{m}.$$

□ 52. Une raie noire correspond à un minimum de réflexion donc on peut l'interpréter en termes de couplage avec un mode de surface, c'est-à-dire à une longueur d'onde pour laquelle la relation de couplage  $k_x(\omega) - \frac{\omega}{c} \sin \theta_3 = q \frac{2\pi}{\Lambda}$  s'applique avec  $q$  entier. En remarquant ici que  $\omega \ll \omega_p$  (dans le cas qui le moins favorable, pour  $\lambda = 750 \text{ nm}$ ,  $\omega_p/\omega \sim 33$ ) et  $\sin \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on peut écrire  $q = \frac{\Lambda}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ; il vient donc  $q_{\min} = \frac{\Lambda}{\lambda_{\max}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1,95$  et  $q_{\max} = \frac{\Lambda}{\lambda_{\min}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3,90$ . Les raies noires observées par Wood correspondent ici à  $q = 2$  ou  $3$  et on peut prévoir dans ce cas **deux raies noires**.

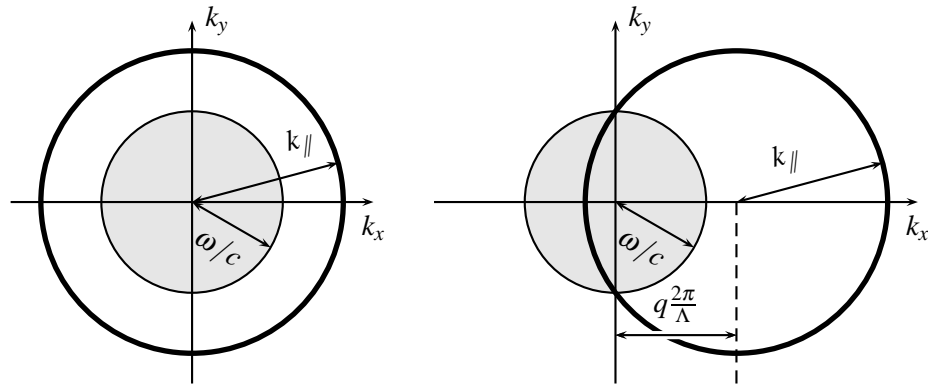
#### II-4. Extraction de la lumière confinée sous forme d'onde de surface

□ 53. On a ici  $\vec{k} = \vec{k}_{\parallel} + k_z \vec{e}_z$ ; l'onde étant caractérisée par une décroissance exponentielle  $e^{\pm z/\delta}$  le long de l'axe  $(Oz)$ ,  $k_z = \pm i/\delta$  est imaginaire pur donc  $\vec{k}^2 = k_{\parallel}^2 - 1/\delta^2 < k_{\parallel}^2$ . Enfin, l'onde est supposée se propager dans l'air, donc  $\vec{k}^2 = \omega^2/c^2$ , ce qui permet enfin d'écrire  $k_{\parallel} > \|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}$ .

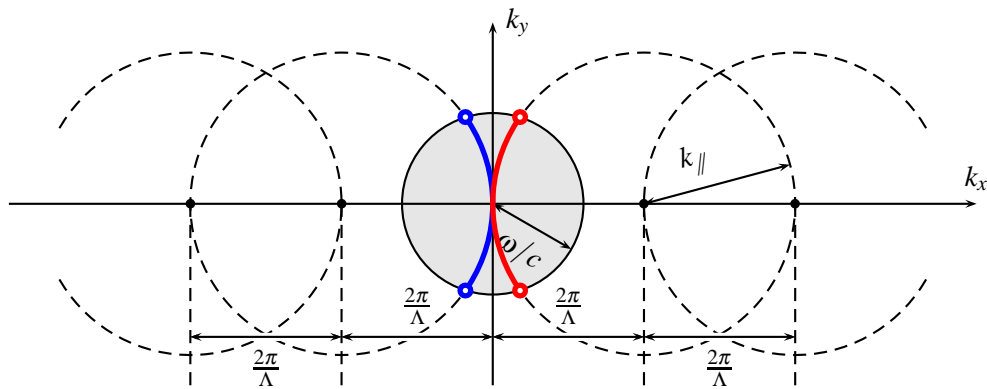
□ 54. L'onde confinée est décrite par un **cercle de confinement** de rayon  $k_{\parallel} > \omega/c$  puisque la propagation isotrope dans le plan  $(xOy)$  impose  $(k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2$  avec  $k_x^2 + k_y^2 = k_{\parallel}^2$ . Ce rayon est donné dès lors que  $\delta$  l'est. Par contre, une onde se propageant librement vérifie  $k_z \in \mathbb{R}$  donc  $k_x^2 + k_y^2 = \omega^2/c^2 - k_z^2 \leq \omega^2/c^2$ : elle est donc représentée par un point intérieur aux **disque de propagation libre**, de rayon  $\omega/c$ . Sur la figure page suivante, à gauche, on voit qu'il n'y a pas d'intersection entre les deux domaines; l'onde confinée **ne peut pas** se propager dans l'espace libre.

□ 55. L'effet de diffraction se traduit par l'existence de maxima dans toutes les directions qui vérifient la relation de Bragg; la composante  $k_x$  de l'onde incidente se traduit, pour l'onde diffractée, par une composante  $k'_x = k_x + q \frac{2\pi}{\Lambda}$ , conformément aux résultats ci-dessus. il y a donc **déplacement de  $q \frac{2\pi}{\Lambda}$**  du cercle de confinement dans la direction  $k_x$ .

□ 56. La figure ci-dessous montre (à droite) comment le disque de propagation libre peut alors couper le cercle de confinement. Il existe donc une possibilité pour l'onde confinée de donner lieu à la formation d'une onde de propagation libre, puisque la condition nécessaire pour cela est la conservation des **composantes tangentielles  $k_x$  et  $k_y$**  du vecteur d'onde de part et d'autre de l'interface.



□ 57. Pour que le cercle de confinement passe par  $k_x = k_y = 0$  (propagation libre dans la direction  $(Oz)$ ), il faut que le cercle de confinement passe par l'origine donc que  $\Lambda = \frac{2\pi}{k_{\parallel}}$ . Dans un tel cas, toutes les intersections des cercles de confinement avec le disque de propagation libre correspondent à des directions de propagation possibles de l'onde extraite. Sur la figure ci-dessous, les directions de propagation des ondes extraites sont représentées par les valeurs de  $k_x$  et  $k_y$  correspondant aux arcs colorés en rouge (ordre 1) et en bleu (ordre  $-1$ ), à compléter par  $k_z = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}$ . On a aussi représenté les cercles de confinement des ordres  $\pm 2$ , montrant qu'ils ne contribuent pas à l'extraction de la lumière confinée.



□ 58. Avec un réseau bidimensionnel, on aura deux translations possibles selon les axes  $k_x$  et  $k_y$ , ce qui conduit (cf. figure ci-dessous) à extraire d'avantage de directions de propagation libre.

