

DEVOIR LIBRE N° 3 (à rendre le 07/12/07)

Ce document comporte 4 pages.

ÉLECTROMAGNÉTISME ET INDUCTION

Problème I : Traitement thermique des surfaces

d'après Centrale-Supélec (MP) 2003

Formulaire :

$$\begin{aligned} \text{célérité de la lumière dans le vide} & c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \text{perméabilité du vide} & \mu_0 = 4 \times \pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , associées à la base locale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ,  $\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(rA_z)}{\partial z} \right]$  et  $\text{rot} \vec{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z$ .

On désire modifier la surface d'un barreau cylindrique, conducteur de l'électricité, en chauffant cette surface. Cet échauffement provoque une diffusion des atomes et une restructuration cristalline. Pour cela, le barreau est plongé dans le champ magnétique créé par un solénoïde parcouru par un courant électrique de fréquence 100 kHz.

I-A : Champ et potentiel statique créés par un solénoïde

On étudie tout d'abord le champ créé par un solénoïde de rayon  $a$ , infini selon un axe  $(Oz)$ , à spires jointives et parcourues par un courant d'intensité  $I$ . Le solénoïde est assimilable à une nappe de courant surfacique d'intensité uniforme  $j_s$ . Dans un premier temps, l'espace intérieur et l'espace extérieur du solénoïde sont vides. L'intensité du courant est constante :  $I = I_0$ .

- 1. Écrire les quatre équations de Maxwell, sous forme locale. On notera  $\rho$  la densité volumique de charge et  $\vec{j}$  la densité volumique de courant.
- 2. Exprimer le vecteur  $\vec{j}_s$  en fonction de  $I_0$ ,  $n$  (nombre de spires par unité de longueur) dans la base des coordonnées cylindriques  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .
- 3. Déterminer précisément les éléments de symétrie de la distribution de courant. En déduire les composantes et les variables intervenant dans l'expression de  $\vec{B}$ . Justifier que  $\vec{B}$  est uniforme dans les deux régions de l'espace délimitées par le solénoïde.
- 4. Donner la relation entre le champ extérieur  $\vec{B}_{\text{ext}}$ , le champ intérieur  $\vec{B}_{\text{int}}$ ,  $\mu_0$  et  $\vec{j}_s$ . Sachant que  $\vec{B}_{\text{ext}}$  est nul, exprimer  $\vec{B}_{\text{int}}$  en fonction de  $\mu_0$ , perméabilité du vide,  $n$  et  $I_0$ .
- 5. Donner la relation fonctionnelle entre le potentiel vecteur  $\vec{A}$  et le champ  $\vec{B}$ , sous forme locale et sous forme intégrale. On cherche un potentiel vecteur de la forme  $\vec{A} = A(r)\vec{e}_\theta$  dans tout l'espace. Exprimer  $A(r)$ .

I-B : Régimes variables dans un solénoïde

L'intensité du courant est à présent variable et sinusoïdale. On utilise la notation complexe pour le courant et pour les champs :  $\vec{I} = I_0 \exp(j\omega_0 t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) \exp(j\omega_0 t)$  et  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(j\omega_0 t)$ .

- 6. Montrer qu'il doit obligatoirement exister un champ électrique  $\vec{E}$  non nul dans une partie de l'espace.
- 7. On cherche des solutions de la forme  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r)\vec{e}_\theta$  et  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(r)\vec{e}_z$ . Déterminer les deux équations différentielles du premier ordre en  $r$  vérifiées par  $\vec{E}(r)$  et  $\vec{B}(r)$ , pour  $r \neq a$ .

Des solutions approchées à ces deux équations peuvent se mettre sous la forme d'une série en  $\omega_0$  limitée au deuxième ordre :

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 n I_0 c \exp(j\omega_0 t) [f_0(r) + \omega_0 f_1(r) + \omega_0^2 f_2(r) + o(\omega_0^2)] \vec{e}_\theta \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 n I_0 \exp(j\omega_0 t) [g_0(r) + \omega_0 g_1(r) + \omega_0^2 g_2(r) + o(\omega_0^2)] \vec{e}_z \end{cases}$$

où  $f_0, f_1, f_2, g_0, g_1$  et  $g_2$  sont six fonctions à valeurs complexes.

- 8. Montrer que l'équation de Maxwell en  $\text{div } \vec{B}$  est vérifiée. Que vaut la densité volumique de charge  $\rho(\vec{r}, t)$  ?
- 9. Déterminer les expressions des fonctions  $f_0(r)$  et  $g_0(r)$  dans tout l'espace. En déduire que les fonctions  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$  sont continues en  $r = a$ .
- 10. En identifiant les termes du même ordre en  $\omega_0$ , écrire les relations entre les six fonctions  $f_0, f_1, f_2, g_0, g_1$  et  $g_2$  pour  $r < a$  et  $r > a$ .
- 11. Résoudre ces équations pour  $r < a$ . On prendra les solutions définies et nulles en  $r = 0$ .
- 12. Déterminer les solutions pour  $r > a$  en assurant la continuité en  $r = a$ .
- 13. Pour quelle valeur maximale  $\Omega$  de  $\omega_0$  le champ magnétique reste-t-il uniforme à moins de 1% près dans le solénoïde ? On donnera l'expression de  $\Omega$  et sa valeur numérique pour  $a = 15$  cm. Commentaires ?

### I-C : Courants de Foucault

Le solénoïde est à présent complètement rempli par un cylindre conducteur, de conductivité électrique  $\gamma$ , et le courant qui l'alimente est sinusoïdal, de pulsation  $\omega_0 : I(t) = I_0 \cos(\omega_0 t)$ . Localement, on pourra écrire  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  où  $\vec{j}$  est l'amplitude complexe de la densité volumique de courant.

- 14. Déterminer les deux équations différentielles du premier ordre en  $r$  vérifiées par  $\vec{E}(r)$  et  $\vec{B}(r)$ , pour  $r < a$ .
- 15. Montrer que l'on peut négliger ici la densité de courant de déplacement devant la densité de courant de conduction dans le cas d'un cylindre de cuivre ( $\gamma_{\text{Cu}} = 6,0 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ) ou de silicium ( $\gamma_{\text{Si}} = 1,0 \times 10^3 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ), pour une fréquence de 100 kHz. Simplifier alors les équations précédentes.
- 16. Écrire l'équation différentielle ( $E_q$ ) vérifiée par  $\vec{E}(r)$  seul puis l'équation vérifiée par  $\vec{B}(r)$  seul.
- 17. L'équation ( $E_q$ ) fait apparaître une constante homogène à une longueur, que l'on notera  $\lambda$ . Donner l'expression de  $\lambda$  et calculer sa valeur pour le cuivre  $\lambda_{\text{Cu}}$  et pour le silicium  $\lambda_{\text{Si}}$  pour une fréquence de 100 kHz.
- 18. La résolution de l'équation différentielle ( $E_q$ ) fournit la fonction complexe  $\vec{E}(r)$ . On a représenté (fig. 1) les courbes  $f(r) = \vec{E}(r)$  en choisissant l'échelle de sorte que  $f(a) = 1$ , pour un barreau de silicium et pour un barreau de cuivre. Décrire les propriétés des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans les barreaux, dans chacun des cas. Interpréter le rôle de la constante  $\lambda$ .

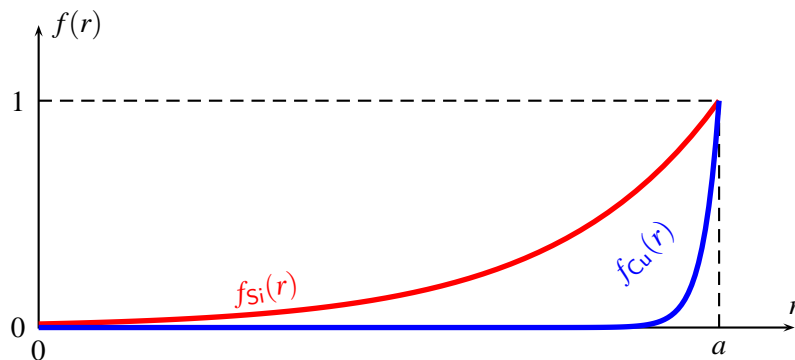


FIG. 1 – Solutions  $f(r)$  dans le cuivre et le silicium

Dans le barreau de cuivre, on décrit la répartition des courants volumiques par le modèle suivant :  $\vec{j} = 0$  pour  $r < a - \lambda$  et  $\vec{j} = j_0(t) \vec{e}_\theta$  pour  $a - \lambda < r < a$ , où  $j_0(t)$  est une fonction réelle.

- 19. Écrire les deux équations de Maxwell relatives au champ magnétique, dans l'approximation de la question 15. Montrer que l'ensemble barreau de cuivre + solénoïde est assimilable à un seul solénoïde de rayon  $\simeq a$ , parcouru par une intensité  $I$  que l'on exprimera en fonction de  $I_0, n, \lambda, j_0$  et  $\omega_0$ .
- 20. De la valeur de  $\vec{B}$  pour  $r < a - \lambda$ , déduire l'expression de  $j_0$  en fonction de  $I_0, n, \omega_0$  et  $\lambda$ .
- 21. Dans le cadre de ce modèle, calculer la puissance instantanée  $dP$  dissipée par effet Joule dans un volume élémentaire  $d\tau$  de barreau puis la puissance moyenne temporelle  $\langle dP \rangle$ . Exprimer enfin la puissance moyenne  $\langle P \rangle$  dissipée sur une hauteur  $h$  du barreau de cuivre. Comment cette puissance dépend-elle de  $\omega_0$  ?
- 22. Déterminer l'expression du champ magnétique pour  $a - \lambda < r < a$ . Exprimer le champ électrique  $\vec{E}$  en  $r = a$ .
- 23. Calculer la valeur instantanée du vecteur de Poynting  $\vec{R}$  en  $r = a$  puis sa valeur moyenne temporelle  $\langle \vec{R} \rangle$  en fonction de  $I_0, n, \gamma, \mu_0$  et  $\omega_0$ .
- 24. Calculer le flux moyen entrant  $\langle \Phi \rangle$  du vecteur de Poynting sur une hauteur  $h$  de cylindre. Commenter le bilan énergétique.

## Problème II : Moteur électrique à courant continu

d'après Centrale-Supélec (TSI) 2002

### II-A : Modélisation d'un moteur à courant continu

Le modèle électrique du moteur est (fig. 2 à gauche) une association en série d'un résistor de résistance  $R$  et d'une source idéale de tension de force électromotrice  $e = -\Psi\Omega$ , où  $\Psi$  est une constante positive, et  $\Omega$  la vitesse angulaire du rotor (élément tournant du moteur). Lorsqu'il est parcouru par un courant électrique d'intensité  $i$ , le rotor se met en mouvement sous l'effet d'efforts d'origine électromagnétique de moment  $\mathcal{M} = \Psi' i$ , où  $\Psi'$  est une constante. Ce rotor est soumis à des frottements dont le moment peut être modélisé par une loi de la forme  $\mathcal{M}' = -\varepsilon \mathcal{M}_0 - \gamma \Omega$ , où  $\gamma$  et  $\mathcal{M}_0$  sont des constantes positives, et  $\varepsilon$  représente le signe de la vitesse angulaire  $\Omega$  lorsque celle-ci est non nulle. Lorsque la vitesse angulaire  $\Omega$  est nulle,  $\varepsilon$  est indéfini et compris entre  $-1$  et  $+1$ . Le moment d'inertie du rotor est noté  $\mathcal{J}$ .

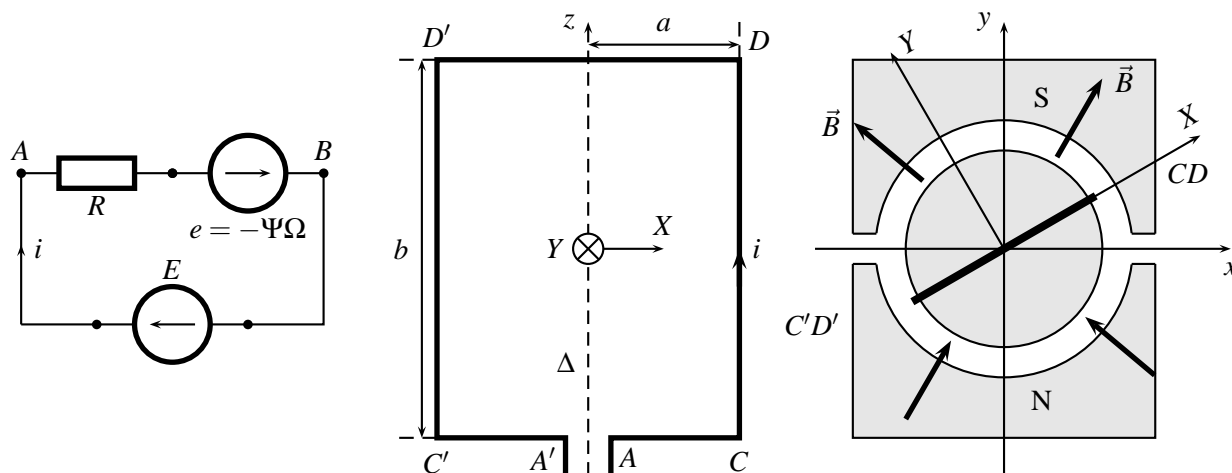


FIG. 2 – Moteur à courant continu

- 25. Quelles sont les unités de mesure des grandeurs  $\Psi$  et  $\Psi'$  ?
- 26. Justifier par une étude énergétique la présence du signe  $-$  dans l'expression de la force électromotrice. Quel est le lien entre  $\Psi$  et  $\Psi'$  ?
- 27. Le moteur étant initialement au repos, il est alimenté à l'instant  $t = 0$  par une source idéale de tension de force électromotrice  $E$  constante. Déterminer la condition sur  $E$  pour que le moteur se mette en rotation avec une vitesse angulaire positive. Cette condition étant satisfaite, déterminer l'évolution au cours du temps de la vitesse angulaire de rotation du moteur à vide.
- 28. Exprimer la puissance fournie par la source de tension en régime établi. Sous quelles formes cette puissance est-elle convertie ?

### II-B : Principe physique d'un moteur à courant continu

Le rotor du moteur (fig. 2, au centre et à droite) est constitué de  $N$  spires rectangulaires (de côtés  $2a$  et  $b$ ) tournant autour d'un axe  $\Delta$  coïncidant avec l'axe  $(Oz)$ , passant par leur centre  $O$  et parallèle aux côtés  $CD$  et  $C'D'$ . Il est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Le champ  $\vec{B}$  est négligeable sur les brins  $DD'$ ,  $AC$  et  $A'C'$ . Sur les brins  $CD$  et  $C'D'$ , il est radial et de norme  $B$  pratiquement constante.

Dans le domaine caractérisé par  $y < 0$  (ce qui est le cas du brin  $C'D'$  dans la position représentée sur la fig. 2 à droite),  $\vec{B}$  est radial entrant, tandis qu'il est radial sortant dans le domaine caractérisé par  $y > 0$ , ce qui est le cas du brin  $CD$  dans la position représentée sur le même schéma. Un point  $M$  courant du brin  $CD$  sera repéré par  $\vec{OM} = a\vec{e}_x + z\vec{e}_z$  avec  $z \in [-b/2, b/2]$ .

La forme des pièces polaires  $N$  et  $S$  de l'aimant et la présence d'un noyau de fer cylindrique d'axe  $(Oz)$  permettent d'obtenir un champ magnétique  $\vec{B}$  pratiquement radial, au niveau des brins  $CD$  et  $C'D'$ .

On se limite pour l'instant au cas de la fig. 2, au centre et à droite.

- 29. Comparer les directions et les sens des forces de Laplace  $\vec{F}_{CD}$  et  $\vec{F}_{C'D'}$  s'exerçant sur les deux tronçons  $CD$  et  $C'D'$ .

- 30.** Montrer que le moment  $\mathcal{M}_1$  par rapport à l'axe  $\Delta$  des forces de Laplace s'exerçant sur la spire peut se mettre sous la forme  $\mathcal{M}_1 = i\Psi_1$  ; exprimer  $\Psi_1$ .
- 31.** L'expression de  $\Psi_1$  dépend-elle de la position de la spire ? Que se passe-t-il en particulier si le brin  $CD$  passe dans le domaine  $y < 0$  ?
- 32.** Quelle serait la valeur moyenne de  $\mathcal{M}_1$  sur un tour si l'intensité  $i$ , comptée positivement dans le sens  $CD$ , était constante ?
- 33.** En fait, un commutateur permet d'avoir toujours une intensité de même signe dans le brin qui évolue dans la zone  $y > 0$ . Montrer alors que le moment des efforts de Laplace (ou couple moteur) s'exerçant sur le rotor dans son ensemble peut s'écrire  $\mathcal{M} = \Psi i$ , avec  $\Psi = N\Psi_1$ , quelle que soit la position du rotor. Justifier ce résultat en indiquant l'approximation qui doit être effectuée pour l'obtenir.
- 34.** La spire tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour de l'axe  $\Delta$ , calculer la force électromotrice induite  $e$  dans le cas représenté sur la fig. 2, au centre et à droite. Mettre cette force électromotrice sous la forme  $e = -\Psi_2\Omega$  ; comparer  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  et conclure.