DEVOIR LIBRE N° 2 (à rendre le 05/10/07)

Ce document comporte 3 pages.

DYNAMIQUE DU POINT

Constantes physiques (pour les deux problèmes)

Masse de l'électron	$m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg
Masse d'un nucléon	$m_n \simeq 1,67 \times 10^{-27}$ kg
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = h/2\pi$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Accélération de la pesanteur	$g = 9,8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
Point de congélation de l'eau sous 1 bar	$T_0 = 237$ K

Problème I : Modèle semi-quantique de Bohr

d'après Centrale–Supélec (MP) 2005

Chaque atome (sous le coup d'une excitation) est capable de rayonner une onde électromagnétique (parfois appartenant au spectre visible). Pour l'atome d'hydrogène, les longueurs d'onde caractéristiques de ces rayonnements vérifient la loi expérimentale de Balmer-Rydberg : $\dfrac{1}{\lambda_{np}} = R_H\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{p^2}\right)$, où n et p sont des entiers $(n < p)$ et R_H est la constante de Rydberg. On souhaite retrouver théoriquement ce résultat en s'intéressant à l'atome d'hydrogène.

I-A : Quantification et condition de Bohr

Rutherford propose, dans son modèle atomique, la répartition suivante des charges pour l'atome d'hydrogène : la charge positive e se trouve dans un noyau quasi-ponctuel de masse m_n autour duquel gravite l'électron, de charge $q_e = -e$ et de masse m_e. On se place dans le référentiel galiléen du laboratoire où l'atome est fixe.

☐ **1.** Montrer qu'au moyen d'une approximation que l'on précisera, il est possible d'envisager une trajectoire circulaire de rayon R de l'électron autour du noyau fixe. Quelle(s) correction(s) devrait-on apporter au modèle si l'on voulait tenir compte de la mobilité du noyau ? Faire l'application numérique.

☐ **2.** Calculer la vitesse v correspondant à cette orbite et en déduire la période T de rotation de l'électron sur cette orbite en fonction de ε_0, m_e, e et R.

☐ **3.** Montrer que la force électrique ressentie par l'électron dérive d'une énergie potentielle que l'on explicitera. En déduire l'énergie mécanique E.

☐ **4.** On numérote par deux entiers n et p deux orbites circulaires distinctes d'énergies mécaniques respectives E_n et E_p. On note σ_n et σ_p les moments cinétiques respectifs par rapport au noyau. Montrer que $E_p - E_n = Y\left(\dfrac{1}{\sigma_n^2} - \dfrac{1}{\sigma_p^2}\right)$, Y étant une constante que l'on explicitera en fonction de e, ε_0 et m_e.

☐ **5.** En tenant compte de résultats connus en 1913 (théories du corps noir et de l'effet photoélectrique), Bohr a pu poser la relation bien connue aujourd'hui : $E_p - E_n = h\nu_{np}$ entre énergie et fréquence. De plus, il a posé la condition de quantification du moment cinétique suivante pour les orbites circulaires, $\sigma_n = n\hbar$. Montrer que ces deux relations permettent de retrouver la loi de Balmer-Rydberg. En déduire une expression de la constante de Rydberg R_H en fonction de ε_0, m_e, e, c et h.

☐ **6.** *Applications numériques :* calculer R_H et les quatre premières longueurs d'onde de la série de Balmer ($n = 1$). Dans quel domaine spectral ces radiations se situent-elles ?

☐ **7.** Exprimer l'énergie de liaison $E_\infty - E_1$ de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental ; faire l'application numérique, en électron-volt.

I-B : Expérience de Franck et Hertz

Pour confirmer le modèle de Bohr, l'expérience décrite ici a été réalisée en 1913. Dans une ampoule fermée (fig. B à gauche), des électrons sont émis par un filament chauffé (effet thermoélectrique) et placés dans une atmosphère contenant une vapeur de gaz monoatomique sous faible pression. Une grille permet soit d'accélérer soit de freiner les électrons. Cette grille est portée au potentiel électrique V_G positif. L'électrode collectrice est portée au potentiel électrique V_P. Le potentiel électrique V_G est obtenu grâce à un circuit contenant deux résistances variables (x et $R-x$, avec $0 \leqslant x \leqslant R$) et un générateur délivrant une tension V_0. Dans le montage, on place également un ampèremètre mesurant l'intensité du courant électrique I circulant du point G au point P. On supposera $I \ll V_0/R$.

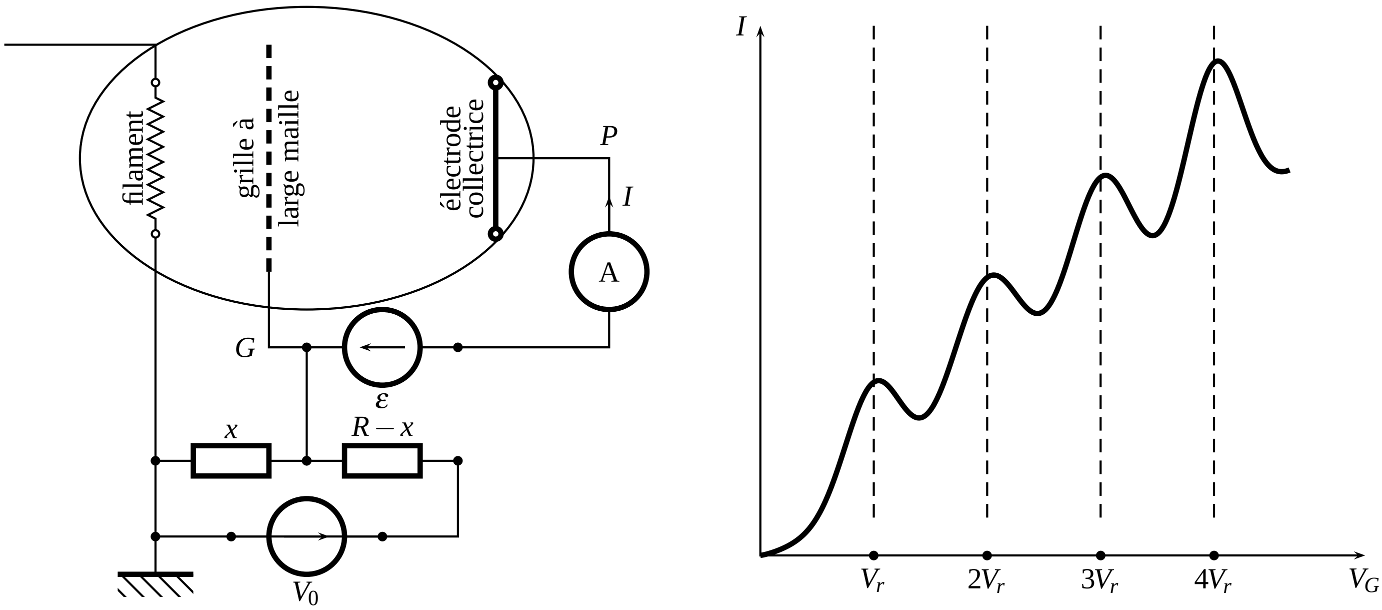

FIG. 1 – Expérience de Franck et Hertz

☐ **8.** Quelle est la tension de la grille V_G ? À quoi servent les résistances réglables ?

☐ **9.** Le filament chauffé émet des électrons de vitesse quasi-nulle. Quelle est la vitesse des électrons au niveau de la grille ?

☐ **10.** On suppose que l'électrode collectrice est au potentiel $V_P = V_G - \varepsilon$ où ε est une constante positive supposée petite devant V_G. Quelle est la vitesse des électrons au niveau de l'électrode (dans l'hypothèse où la traversée de la grille s'effectue sans changement de vitesse et où la vapeur de gaz est sans influence) ?

☐ **11.** À quoi sert l'ampèremètre ? Justifier le nom de l'électrode dite collectrice.

☐ **12.** On suppose maintenant que la vapeur de gaz contenue dans l'ampoule influence le mouvement des électrons. Ces derniers peuvent subir deux types de collisions avec les atomes du gaz, soit :

- une collision élastique, où l'électron conserve son énergie cinétique,
- une collision inélastique, où l'électron peut transférer de l'énergie à l'atome. On notera W l'énergie transférée à l'atome de gaz sous forme d'énergie potentielle.

On donne (fig. B à droite) la courbe de I en fonction de V_G. Interpréter cette courbe pour $0 \leqslant V_G \leqslant V_r$. Que se passe-t-il pour $V_G = V_r$? Interpréter la suite de la courbe.

☐ **13.** En déduire que l'atome ne peut prendre à l'électron qu'une quantité d'énergie parfaitement déterminée W_r que l'on exprimera.

☐ **14.** Dans les expériences faites avec de la vapeur de mercure, on mesure $V_r = 4,9$ V. (Le potentiel d'ionisation est $10,5$ V). Qu'arrive-t-il aux atomes de mercure dès que V_G est supérieur à V_r ?

Problème II : Panache émis par une cheminée

d'après Centrale–Supélec (PSI) 2003

Un des problèmes à résoudre dans une usine est l'évacuation des rejets gazeux : il peut s'agir de vapeur d'eau ou d'autres gaz, contenant parfois des traces de constituants solides. Après traitement chimique ou physique si nécessaire, ces effluents gazeux passent dans une cheminée et sont rejetés dans l'atmosphère. Cette cheminée doit être assez haute pour que la concentration des polluants éventuels retombant sur les habitations voisines soit suffisamment faible.

À la sortie de la cheminée, la vapeur d'eau, toujours contenue dans les rejets, se condense. Les gouttelettes d'eau diffusent la lumière et on peut ainsi observer le panache gazeux. Quand l'air est calme, on constate que les effluents gazeux montent verticalement. On s'intéresse à la hauteur maximale que le panache peut atteindre dans ces conditions.

On note v_e la vitesse d'éjection des effluents gazeux et l'écart $\Delta\mu = \mu - \mu_{\text{air}}$ entre les masses volumiques de ces effluents et de l'air environnant dont les températures sont désormais considérées comme voisines, si bien que $\Delta\mu > 0$.

Pour les applications numériques, on prendra pour masses molaires $\mathscr{M}_{\text{air}} = 29\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, $\mathscr{M}_{\text{eau}} = 18\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$. La pression au sol sera prise égale à $P_{\text{sol}} = 1{,}00$ bar.

☐ **15.** Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur une particule de gaz et écrire l'équation du mouvement. En admettant que l'écart relatif de masses volumiques $\Delta\mu/\mu$ ne dépend pas de l'altitude et en négligeant tous les phénomènes dissipatifs, déterminer la hauteur maximale atteinte $H_{\max}$. *Application numérique :* $\Delta\mu/\mu = 0{,}035$, $v_e = 12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer $H_{\max}$.

☐ **16.** On observe un élargissement du panache. Quels peuvent être les phénomènes physiques responsables de cet élargissement ? La hauteur maximale réellement atteinte sera-t-elle plus grande ou plus petite que la hauteur calculée ?

En présence de vent, on peut distinguer trois phases dans l'évolution du panache : le panache est presque vertical et les effluents montent sous l'effet de leur propre vitesse, ensuite le panache se courbe et devient approximativement horizontal, puis dans la troisième phase les gaz du panache ont une densité égale à celle de l'air environnant et n'ont plus de mouvement propre. C'est cette troisième phase que nous allons étudier : elle ne dépend plus que des propriétés de l'air environnant, et en particulier de la variation verticale de température dans l'atmosphère. Dans les cinq cents premiers mètres de l'atmosphère, la température varie avec l'altitude z suivant une loi linéaire $T(z) = T_{\text{sol}} - A\cdot z$, où T_{sol} est la température au sol et A une constante.

☐ **17.** Comment varient la pression P et la masse volumique μ_{air} de l'air avec l'altitude ? On posera $P(z=0) = P_{\text{sol}}$ et $\mu_{\text{air}}(z=0) = \mu_{\text{sol}}$.

☐ **18.** L'effluent contient de l'eau liquide, on en considère une goutte de masse m et de volume V se trouvant à l'altitude z dans l'air. Donner l'expression de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}(z)$ qu'elle subit de la part de l'air environnant.

☐ **19.** Si cette gouttelette ne tombe pas, c'est qu'elle est soumise à une force supplémentaire $\vec{F}$ de la part de l'atmosphère, qu'on supposera constante lors des petits mouvements de la goutte. En écrivant la condition d'équilibre de la goutte, donner l'expression de cette force $\vec{F}$.

☐ **20.** La gouttelette est déplacée de l'altitude z à l'altitude $z+\delta z$. Établir l'équation du mouvement. Discuter de la possibilité d'un retour à l'altitude z ; montrer en particulier que l'altitude de la gouttelette n'est stable que si la valeur de la constante A est inférieure à une valeur A_{seuil} que l'on exprimera en fonction de la masse molaire $\mathscr{M}_{\text{air}}$ de l'air, de g et R. *Application numérique :* calculer A_{seuil}.

☐ **21.** Une modélisation plus fine consiste à considérer l'eau sous forme de vapeur et à tenir compte des variations de sa masse volumique $\mu_{\text{eau}}(z)$ lors de ses mouvements verticaux. Justifier que les transformations de la vapeur d'eau puissent être considérées comme isentropiques.

☐ **22.** Montrer que l'équation du mouvement d'une petite bulle de vapeur d'eau s'écrit dans ces conditions sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2\delta z}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mu_{\text{air}}}{\mu_{\text{eau}}} g \left[\dfrac{1}{\mu_{\text{air}}}\dfrac{\partial\mu_{\text{air}}}{\partial z} + \dfrac{\mu_{\text{air}} g}{\gamma P}\right]\delta z$, où $\gamma = C_p/C_v$ est le rapport des capacités thermiques de la vapeur d'eau à pression et à volume constants.

☐ **23.** Exprimer le gradient vertical de masse volumique de l'air, $\dfrac{\partial\mu_{\text{air}}}{\partial z}$, en fonction de μ_{air}, g, P, T et du gradient vertical de température. Quelle est la valeur A_{eq} du coefficient A pour que la goutte d'eau ne soit pas accélérée ? *Application numérique :* calculer la valeur limite A_{eq} pour la vapeur d'eau en suspension dans l'air avec $\gamma = 1{,}35$.