

9 — DYNAMIQUE DES SYSTÈMES

9.1 – Expression des grandeurs cinétiques

9.1.1 - Grandeurs cinématiques et moment cinétique

Nous étudions ici le mouvement, relativement au référentiel (K) – qui n'est pas nécessairement galiléen – d'un système matériel (S) formé d'un ou plusieurs solides (Σ_i) et de parties non rigides mais dont nous négligerons la masse (fils, ressorts, etc).

Le mouvement du système est entièrement connu dès lors qu'on connaît, pour chaque sous-ensemble solide (Σ_i), son torseur cinétique \mathcal{C}_i , et en particulier la vitesse $\vec{v}_{A_i \in \Sigma_i}$ d'un des points du solide, et le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}_i$ de ce solide.

Supposons que, pour le solide particulier (Σ), il existe un point $I \in \Sigma$ de vitesse nulle dans (K) à un certain instant. Notons qu'un tel point existe toujours au moins dans le référentiel barycentrique (K^*) : c'est le centre de masse G de (Σ). Dans ce cas, on peut écrire $\vec{v}_M = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IM}$ la vitesse de tout point M de (Σ), ce qui permet le calcul du moment cinétique en I, $\vec{\sigma}_{\Sigma/I} = \sum_k m_k \overrightarrow{IM}_k \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IM}_k \right)$. L'application

$\vec{\Omega} \mapsto \vec{\sigma}_{\Sigma/I}$ est alors une application linéaire qu'on détermine par son action sur les vecteurs de base, comme $\vec{f}(\vec{e}_x) = \sum_k m_k \{ \vec{e}_x(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - x_k(x_k \vec{e}_x + y_k \vec{e}_y + z_k \vec{e}_z) \}$ donc $\vec{f}(\vec{e}_x) = \sum_k m_k \{ \vec{e}_x(y_k^2 + z_k^2) - \vec{e}_y x_k y_k - \vec{e}_z z_k x_k \}$, où x_k , y_k et z_k sont les coordonnées de \overrightarrow{IM}_k . On en déduit la *matrice d'inertie* en I de ce solide :

$$[\mathcal{J}_I] = \begin{bmatrix} \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) & -\sum_k m_k x_k y_k & -\sum_k m_k x_k z_k \\ -\sum_k m_k y_k x_k & \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2) & -\sum_k m_k y_k z_k \\ -\sum_k m_k z_k x_k & -\sum_k m_k z_k y_k & \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

qui permet d'obtenir le moment cinétique $\vec{\sigma}_{\Sigma/I}$ si I est de vitesse nulle ; si on ne trouve pas un tel point, le résultat s'applique à $\vec{\sigma}_{\Sigma/G}^*$ donc (c'est le théorème de König) à $\vec{\sigma}_{\Sigma/G}$:

MOMENT CINÉTIQUE D'UN SYSTÈME SOLIDE

Le moment cinétique d'un système solide (Σ) en un point $I \in \Sigma$ du solide, de vitesse nulle, s'obtient par application de la matrice d'inertie en I au vecteur instantané de rotation : $\vec{\sigma}_{\Sigma/I} = [\mathcal{J}_I] \vec{\Omega}_{\Sigma}$.

On peut calculer de même le moment cinétique barycentrique du même solide, $\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_{\Sigma/G} = [\mathcal{J}_G] \vec{\Omega}_{\Sigma}$, le vecteur instantané de rotation de (Σ) étant identique relativement à (K) et (K^*).

L'opérateur défini dans (9.1) est doté d'une matrice symétrique réelle ; il est donc diagonalisable et toute base diagonalisante porte le nom de *base principale d'inertie*.

9.1.2 - Moments d'inertie

Dans toute base, les éléments diagonaux de $[\mathcal{J}]$ portent le nom de *moments d'inertie* ; adoptant selon le cas un modèle discret ou continu, le moment d'inertie relativement à un axe $\Delta = (A, \vec{u})$ est défini par :

$$J_{\Delta} = \sum_k m_k d^2(M_k, \Delta) = \int_{M \in \Sigma} d^2(M, \Delta) dm \quad (9.2)$$

où $d(M, \Delta) = \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|$ est la distance de M à l'axe Δ .

On remarquera qu'en général, $\vec{\sigma}_{\Sigma/I}$ n'est pas colinéaire à $\vec{\Omega}$. Toutefois, en choisissant un axe (Oz) colinéaire à $\vec{\Omega}$, on peut exprimer le *moment cinétique scalaire*, projection du moment cinétique en un point I de vitesse nulle sur la direction instantanée de rotation :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_{I \in \Sigma} = \vec{0} \\ \vec{\Omega}_{\Sigma} = \Omega \vec{e}_z \end{array} \right\} \implies \sigma_z = \vec{\sigma}_{\Sigma/I} \cdot \vec{e}_z = J_{Iz} \Omega \quad (9.3)$$

L'annulation des éléments non diagonaux de $[\mathcal{J}]$ (produits d'inertie) est en général la conséquence de propriétés de symétrie. En particulier, si l'axe (Iz) est un axe de symétrie matérielle du solide (Σ), alors les symétries $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ conservent la distribution

des masses, donc $\sum_k m_k x_k z_k = \sum_k m_k y_k z_k = 0$. La matrice d'inertie prend alors la forme partiellement diagonale

$$\begin{bmatrix} J_{I_x} & -\sum_k m_k x_k y_k & 0 \\ -\sum_k m_k x_k y_k & J_{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & J_{I_z} \end{bmatrix} \text{ donc :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_{I \in \Sigma} = \vec{0} \\ \vec{\Omega}_\Sigma = \Omega \vec{e}_z \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\sigma}_{\Sigma/I} = J_{I_z} \vec{\Omega}_\Sigma \quad (9.4)$$

(Iz) est axe de symétrie

EXPRESSIONS DU MOMENT CINÉTIQUE D'UN SYSTÈME SOLIDE
 Si le mouvement d'un solide présente un point I de vitesse nulle, alors le moment cinétique de ce solide en ce point a pour composante sur l'axe instantané de rotation la grandeur $\sigma_\Delta = J_\Delta \Omega$, où J_Δ est le moment cinétique par rapport à l'axe instantané de rotation.
 Si cet axe de rotation est un axe de symétrie matérielle du solide, le moment cinétique n'a pas d'autre composante.

La détermination des moments d'inertie, c'est-à-dire le calcul de l'intégrale (9.2), ne dépend que de la géométrie du solide étudié. Dans le cas de deux solides homogènes (cylindre et boule pleines), la fig. 9.1 présente quelques exemples d'axes relativement auxquels les moments d'inertie sont indiqués.

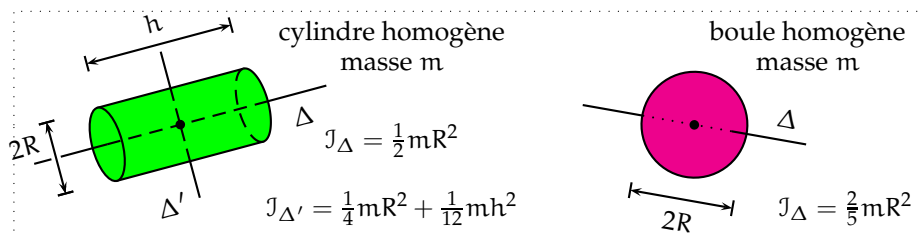


FIG. 9.1 – Exemples de moments d'inertie

Il est toutefois possible de passer du moment d'inertie relativement à un axe Δ au moment d'inertie relativement à un autre axe Δ' , si ces axes sont parallèles. Considérons pour cela (cf. fig. 9.2) l'axe Δ_G , parallèle aux deux précédents mais passant par le centre de masse G du système.

On peut alors écrire $J_{\Delta_G} = \int (y'^2 + z^2) dm$ et $J_\Delta = \int (y^2 + z^2) dm$ avec $y' = y - d$ où d est la distance des deux axes. Le développement de cette seconde intégrale fait apparaître $\int y dm = m y_G = 0$ et $\int dm = m$, masse totale du solide; on a donc $J_\Delta = J_{\Delta_G} + m d^2$. L'application de ce résultat aux axes Δ et Δ' montre que $J_\Delta = J_{\Delta'} + m(d^2 - d'^2)$, qui est le résultat cherché. On remarque aussi que $m d^2 \geq 0$ donc $J_\Delta \geq J_{\Delta_G}$, d'où :

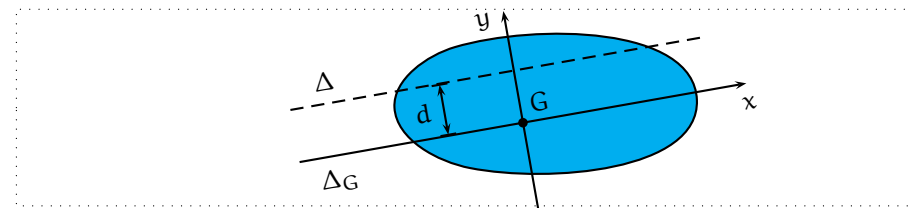


FIG. 9.2 – Théorème de Huygens

THÉORÈME DE HUYGENS
 Pour une direction donnée Δ , le moment d'inertie minimal est atteint pour l'axe Δ_G passant par le centre de masse du système étudié, et $J_\Delta = J_{\Delta_G} + m d^2(\Delta, \Delta_G)$.

9.1.3 - Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un solide qui présente un point I de vitesse nulle peut s'écrire $E_{c,\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_k m_k \vec{v}_{M_k}^2$ avec $\vec{v}_{M_k} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IM_k}$; la permutation circulaire du produit mixte mène à $\vec{v}_{M_k} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IM_k}) = \vec{\Omega} \cdot (\overrightarrow{IM_k} \wedge \vec{v}_{M_k})$ donc $E_{c,\Sigma} = \frac{\vec{\Omega}}{2} \cdot \sum_k m_k \overrightarrow{IM_k} \wedge \vec{v}_{M_k}$ où on reconnaît enfin $E_{c,\Sigma} = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_{\Sigma/I}$; l'emploi de (9.3) mène à :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_{I \in \Sigma} = \vec{0} \\ \vec{\Omega}_\Sigma = \Omega \vec{e}_z \end{array} \right\} \Rightarrow E_{c,\Sigma} = \frac{1}{2} J_{I_z} \Omega^2 \quad (9.5)$$

On peut aussi dans tous les cas faire usage du théorème de König puisque, dans le référentiel barycentrique, tout solide présente un point fixe G; on a donc $E_{c,\Sigma}^* = \frac{1}{2} J_{Gz} \vec{\Omega}^{*2}$ où on a vu que $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}^*$ puisque le référentiel barycentrique est en translation dans le référentiel du laboratoire. Il vient donc la forme plus générale :

$$\vec{\Omega}_\Sigma = \Omega \vec{e}_z \Rightarrow E_{c,\Sigma} = \frac{1}{2} m \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} J_{Gz} \Omega^2 \quad (9.6)$$

9.1.4 - Grandeurs cinétiques des systèmes matériels

Ici et dans toute la suite, nous considérons un système matériel quelconque (S), forme éventuellement (système articulé) de la réunion de plusieurs sous-ensembles solides (Σ_i). L'associativité des barycentres permet d'abord d'établir la relation :

$$m\vec{v}_G = \sum_i m_i \vec{v}_{G_i} \quad (9.7)$$

en fonction des masses m_i et des mouvements des centres d'inertie G_i des sous-systèmes solides formant (S). De la même façon, la définition extensive du moment cinétique montre que $\vec{\sigma}_{S/A} = \sum_i \vec{\sigma}_{\Sigma_i/A}$; toutefois, il n'est pas toujours possible de déterminer tous les moments cinétiques des solides (Σ_i) relativement au même point A et, même si c'est le cas, on peut souhaiter connaître le moment cinétique en un autre point B.

La définition $\vec{\sigma}_{S/A} = \sum_k m_k \overrightarrow{AM_k} \wedge \vec{v}_{M_k}$ impose $\vec{\sigma}_{S/B} - \vec{\sigma}_{S/A} = \overrightarrow{BA} \wedge \sum_k m_k \vec{v}_{M_k}$; reconnaissant alors $m\vec{v}_G = \sum_k m_k \vec{v}_{M_k}$, on identifie le *torseur cinétique* d'un système matériel quelconque par ses éléments de réduction au point arbitraire A :

$$\mathcal{L}_S = \left\{ \begin{array}{c} m\vec{v}_G \\ \vec{\sigma}_{S/A} \end{array} \right\}_A \quad (9.8)$$

qui permet de relier les moments cinétiques en deux points différents :

$$\vec{\sigma}_{S/B} = \vec{\sigma}_{S/A} + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{v}_G \quad (9.9)$$

et chaque moment cinétique d'un sous-système solide (Σ_i) peut alors être ramené à celui d'un point I de vitesse nulle ou au centre de masse G_i .

TORSEUR CINÉTIQUE

Le moment cinétique en A d'un système matériel *quelconque* forme le moment d'un torseur, donc la *résultante cinétique* est l'impulsion totale $m\vec{v}_G$ du système.

Enfin, l'énergie cinétique du système $E_{c,S} = \sum_i E_{c,\Sigma_i}$ est la somme des énergies cinétiques des sous-systèmes solides qui composent (S), du fait encore ici de l'extensivité de sa définition. Notons que le théorème de König permet d'écrire, pour un sous-système solide seulement, $E_{c,\Sigma} = \frac{1}{2} [m\vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \vec{\sigma}_{\Sigma/G} \cdot \vec{\Omega}_\Sigma]$ puisque $\vec{\sigma}_{\Sigma/G}$ a pour composante $J_{Gz}\Omega$ en projection sur l'axe (Oz) colinéaire à $\vec{\Omega}_\Sigma$. On reconnaît dans le terme entre crochets le comoment du torseur cinétique \mathcal{L} et du torseur cinématique \mathcal{C} . Ce résultat est indépendant du point de calcul et on pourra donc écrire :

$$E_{c,\Sigma} = \frac{1}{2} \langle \mathcal{C} \mathcal{L} \rangle = \frac{1}{2} m\vec{v}_G \cdot \vec{v}_A + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{\Sigma/A} \cdot \vec{\Omega}_\Sigma \quad (9.10)$$

9.2 – Lois du mouvement

9.2.1 - Théorèmes dynamiques

Le théorème de la résultante dynamique a déjà été établi dans le cas général, sous la forme $\vec{F} = m\vec{\gamma}_G$, en fonction de la résultante des forces extérieures \vec{F} ; dans le cas d'un système articulé, les forces extérieures incluent toutes les liaisons et réactions.

Le théorème du moment cinétique a aussi été établi, en fonction du moment $\vec{\Gamma}_A$ des forces extérieures, sous la forme générale $\left. \frac{d\vec{\sigma}_{S/A}}{dt} \right|_K + \vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G = \vec{\Gamma}_A$ qui s'applique encore ici, en tenant compte des moments des actions de liaison.

ÉTUDE D'UN SYSTÈME PAR LES THÉORÈMES DYNAMIQUES

Le mouvement d'un système matériel (S) relativement au référentiel (K) peut être étudié par le théorème du moment cinétique $\left. \frac{d\vec{\sigma}_{S/A}}{dt} \right|_K + \vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G = \vec{\Gamma}_A$, complété ou suivi par le théorème de la résultante dynamique $m\vec{\gamma}_G = \vec{F}$. Dans les deux théorèmes, résultante et moment *incluent* les éventuelles forces d'inertie mais *excluent* les forces intérieures.

Torseur dynamique La définition $\vec{\Gamma}_A = \sum_k \overrightarrow{AM_k} \wedge \vec{f}_k$ du moment en A des forces exercées sur un système matériel permet d'écrire $\vec{\Gamma}_A - \vec{\Gamma}_B = \overrightarrow{AB} \wedge \sum_k \vec{f}_k$, ce qui définit le *torseur dynamique* ou torseur des efforts exercées sur le système :

$$\mathcal{F}_S = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{\Gamma}_A \end{array} \right\}_A \quad (9.11)$$

qui permet de relier les moments du même système de forces en deux points différents, $\vec{\Gamma}_B = \vec{\Gamma}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$. En particulier, si le point A est un *point d'application* du torseur étudié, $\vec{\Gamma}_A = \vec{0}$ donc $\vec{\Gamma}_1 = \overrightarrow{IA} \wedge \vec{F}$. Notons aussi le cas particulier des forces intérieures, de résultante et de moment nul, donc associées à un torseur nul.

9.2.2 - Théorèmes énergétiques

L'évolution de l'énergie cinétique d'un système matériel a aussi déjà été établie dans le cas général sous la forme du théorème de la puissance cinétique, $\frac{dE_{c,S}}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$, où on doit tenir compte de toutes les puissances des forces extérieures et intérieures,

ces dernières pouvant toutefois être exprimées indifféremment dans n'importe quel référentiel.

On peut aussi intégrer cette relation au cours d'une durée finie pour en déduire le théorème de l'énergie cinétique, sous la forme $\Delta E_{c,S} = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$, où le travail W d'un système de forces est l'intégrale $W = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{P} dt$, entre l'instant initial et l'instant final de la transformation envisagée.

On adoptera la notation différentielle $\delta W = \mathcal{P} dt$, rappelant que cette forme dépend de la transformation effectivement suivie et pas seulement des états initial et final.

ÉTUDE D'UN SYSTÈME PAR LES THÉORÈMES ÉNERGÉTIQUES

Le mouvement d'un système matériel (S) relativement au référentiel (K) peut être étudié (surtout si le système est décrit par un paramètre cinématique unique) par le théorème de la puissance cinétique $\frac{dE_{c,S}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$, ou par le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_{c,S} = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$.

Dans les deux théorèmes, puissance et travail *incluent* les éventuelles forces d'inertie (sauf les forces de Coriolis dont le travail est toujours nul) et *incluent* les forces intérieures.

Forces conservatives Dans le cas particulier où un système de forces de dépend que de l'état initial et de l'état final, mais pas de l'évolution particulière suivie, ces forces sont dites *conservatives*; on écrit alors $\delta W = -dE_p$, ce qui définit (à une constante arbitraire près) l'énergie potentielle E_p , fonction des paramètres géométriques qui définissent la position spatiale du système étudié.

On peut encore écrire $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}$ pour la puissance d'un système conservatif, ce qui permet de réécrire le théorème de la puissance cinétique sous la forme :

$$\frac{d}{dt} (E_{c,S} + E_p) = \mathcal{P}_{\text{nc}} \quad (9.12)$$

définissant l'énergie mécanique $E = E_{c,S} + E_p$ du système subissant ces interactions conservatives, et la puissance des autres efforts (non conservatifs) \mathcal{P}_{nc} .

Puissance des forces exercées sur un solide Dans le cas des forces exercées sur un solide (Σ), on peut déterminer la puissance de ces forces $\mathcal{P} = \sum_k \vec{f}_k \cdot \vec{v}_{M_k \in \Sigma}$ au moyen de $\vec{v}_{M_k \in \Sigma} = \vec{v}_{A \in \Sigma} + \vec{\Omega}_\Sigma \wedge \overrightarrow{AM_k}$, donc $\mathcal{P} = \vec{v}_{A \in \Sigma} \cdot \sum_k \vec{f}_k + \vec{\Omega}_\Sigma \cdot \sum_k \overrightarrow{AM_k} \wedge \vec{f}_k$ après permutation du produit mixte. On reconnaît donc le comoment du torseur des forces \mathcal{F} et du torseur cinématique \mathcal{C} :

$$\mathcal{P}_{\rightarrow \Sigma} = \langle \mathcal{CF} \rangle = \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{\Gamma}_A \cdot \vec{\Omega}_\Sigma \quad (9.13)$$

9.3 – Systèmes de forces

9.3.1 - Interactions extérieures ponctuelles

On appelle ainsi les forces exercées en un seul point A (point d'attache d'un fil ou d'un ressort, point de contact unique sur un support, etc.) d'un système (S). Pour un tel ensemble de forces, le point I est un *point d'application* et on en déduit les expressions du moment et de la puissance de telles forces :

$$\vec{\Gamma}_I = \overrightarrow{IA} \wedge \vec{F} \quad \mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{I \in S} \quad (9.14)$$

et le moment $\vec{\Gamma}_I$ a pour norme $\Gamma_I = Fd$, produit de la norme F de la résultante par le *bras de levier* d , distance de I à la droite d'action (A, \vec{F}) , axe central du torseur des forces.

Fils inextensibles et ressorts élastiques Considérons le fil inextensible et de masse négligeable de la fig. 9.3 à gauche, reliant le point A du système (S) au point O. L'application du théorème de la résultante à un système de masse négligeable impose $\sum \vec{f} = \vec{0}$: les forces exercées sur le fil à ses deux extrémités sont opposées, donc les deux forces exercées *par le fil* le sont aussi : le fil transmet les forces. De même, l'application du théorème du moment cinétique au même système impose $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ en tout point : ces deux forces sont donc colinéaires.

FIL INEXTENSIBLE DE MASSE NÉGLIGEABLE

Un fil inextensible tendu transmet les forces ; il exerce (au sens près) la même force sur ses deux extrémités, colinéaire au fil.

On peut alors écrire $\vec{\Gamma}_A = \vec{\Gamma}_O = \vec{0}$; d'autre part, si le point d'attache O est fixe dans le référentiel d'étude (K), $\vec{v}_A = \frac{d}{dt} \Big|_K \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OA}$ donc $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_A = 0$: la tension d'un fil relié à un point fixe *ne travaille pas*.

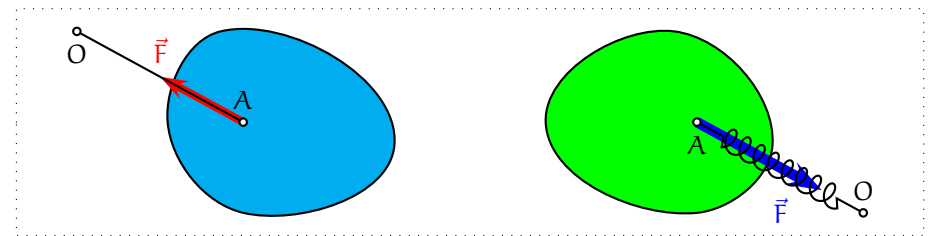


FIG. 9.3 – Fil inextensible (à gauche). Ressort élastique (à droite)

Considérons maintenant le ressort élastique et de masse négligeable de la fig. 9.3 à droite, reliant le point A du système (S) au point O. Le ressort étant de masse nulle, il transmet encore des forces colinéaires à sa direction ; toutefois, on peut en général relier ces forces à l'allongement du ressort (c'est la loi de Hooke), $\vec{F} = -k(OA - \ell_0) \vec{u}$ où \vec{u} est le vecteur unitaire de la direction de \overrightarrow{OA} , k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur de repos.

On peut alors écrire $\vec{\Gamma}_A = \vec{\Gamma}_O = \vec{0}$; d'autre part, la somme des deux puissances exercés par le ressort en A sur le système (S) et en O sur le point d'attache (si ce point est mobile) s'écrit $\mathcal{P} = -k(OA - \ell_0) \vec{u} \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_O)$ avec aussi $\vec{v}_A - \vec{v}_O = \frac{d}{dt}((OA - \ell_0)\vec{u})$; on en déduit immédiatement que ces forces sont conservatives puisque $\mathcal{P} = -\frac{dE_p}{dt}$ où on peut choisir $E_p = \frac{1}{2}k(OA - \ell_0)^2$:

RESSORT ÉLASTIQUE DE MASSE NÉGLIGEABLE

Dans son domaine élastique, un ressort exerce sur ses deux extrémités la même force $F = k\Delta\ell$, proportionnelle à l'allongement $\Delta\ell$ du ressort.

Ces forces sont conservatives et dérivent de l'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$.

9.3.2 - Interactions extérieures réparties

On appelle ainsi les forces réparties sur l'ensemble des points du système étudié ; leur résultante est $\vec{F} = \sum_k \vec{f}_k$ et leur moment $\vec{\Gamma}_A = \sum_k \overrightarrow{AM}_k \wedge \vec{f}_k$; c'est notamment le cas des forces associées à des *champs* : forces électrostatiques, gravitationnelles, de pression, d'inertie.

Si la résultante \vec{F} de ces forces n'est pas nulle, il existe un axe (colinéaire à \vec{F}) de points de moment nul ; chacun de ces points A peut-être appelé *point d'application* du système de forces, et, dans le cas d'un système solide, $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{A \in \Sigma}$.

Si la résultante \vec{F} est nulle, le torseur des forces est un *couple* de moment uniforme sur tout le système, $\vec{C} = \vec{\Gamma}_A \forall A$; on peut alors écrire $\mathcal{P} = \vec{C} \cdot \vec{\Omega}_\Sigma$ dans le cas d'un système solide.

Pesanteur Les forces de pesanteur $\vec{f}_k = m_k \vec{g}$, dans le cas où le champ de pesanteur est uniforme, ont pour résultante $\sum m_k \vec{g}$ et pour point d'application le centre de masse G puisque $\vec{\Gamma}_G = \sum_k m_k \overrightarrow{GM}_k \wedge \vec{g} = \vec{0}$; leur puissance est donc $\mathcal{P} = m\vec{g} \cdot \vec{v}_{G \in \Sigma}$ pour un système solide. Si on note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, il vient $\mathcal{P} = -mg \frac{dz_G}{dt}$ donc $E_p = mgz_G$, grandeur qui s'étend par associativité à un système non solide :

FORCES DE PESANTEUR EN CHAMP UNIFORME

La force $m\vec{g}$ s'applique en G, centre d'inertie d'un système quelconque. Elle est conservative avec $E_p = mgz_G$ si l'axe (Oz) est vertical ascendant.

Forces d'inertie en rotation uniforme d'axe fixe Considérons un référentiel (K) en rotation uniforme à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ autour de l'axe fixe (Oz). Les forces d'inertie prennent alors la forme $\vec{f}_k = m_k \omega^2 \overrightarrow{OM}_{k\perp}$, en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) d'axe (Oz). Leur résultante vérifie alors $\vec{F} = \omega^2 \sum_k m_k \overrightarrow{OM}_{k\perp} = m\omega^2 \overrightarrow{OG}_\perp$, en notant \vec{u}_\perp la composante de \vec{u} perpendiculaire à (Oz) : tout se passe, pour le calcul de la résultante, comme si toute la masse était concentrée en G.

Le moment de ces forces n'est en général pas nul en G, qui n'est pas toujours le point d'application des forces d'inertie. Toutefois, la puissance de ces forces peut être déterminée directement puisque $\mathcal{P} = \omega^2 \sum_k m_k \rho_k \dot{\rho}_k = -\frac{dE_p}{dt}$, avec pour *énergie potentielle centrifuge* la grandeur $E_p = -\frac{1}{2}\omega^2 J_\Delta$, où $J_\Delta = \sum_k m_k \rho_k^2$ est le moment d'inertie du système étudié (qu'il soit solide ou non) relativement à l'axe de rotation.

9.3.3 - Forces intérieures

On a déjà eu l'occasion de préciser que les forces intérieures à un système quelconque forment un torseur nul. Du fait de (9.13), ce torseur a aussi une puissance nulle s'il s'exerce sur un solide :

FORCES INTÉRIEURES À UN SOLIDE

Les forces intérieures à un système solide unique ne travaillent pas.

mais il n'en va pas forcément de même des forces de liaison lors du contact *entre plusieurs solides*, qui sont décrites ci-après.

9.4 - Interactions de contact entre solides

9.4.1 - Cinématique du contact

On étudie ici (cf. fig. 9.4 à gauche) le contact d'un solide « mobile » (Σ) sur un solide « support » (Σ_0), lui-même éventuellement mobile dans le référentiel d'étude (K). Au point de contact I, on peut définir un plan tangent (Π) commun aux solides en contact.

À l'instant t, les points matériels $I \in \Sigma$ et $I \in \Sigma_0$ coïncident au lieu géométrique $I(t)$; à un instant ultérieur $t + dt$ (cf. fig. 9.4 à droite), ces deux points se sont déplacé séparément et ils ne coïncident plus avec le nouveau lieu géométrique du contact $I(t + dt)$.

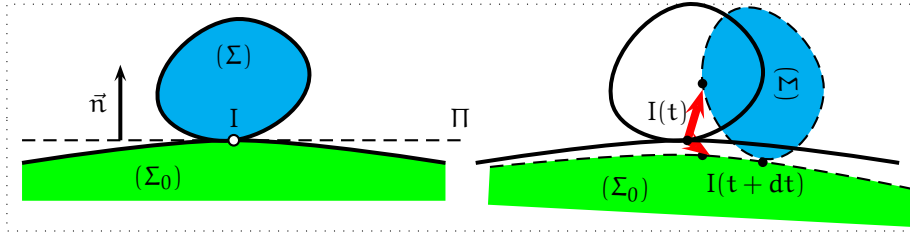


FIG. 9.4 – Contact d'un mobile sur son support

La cinématique du contact est entièrement décrite par les mouvements *relatifs* du mobile par rapport au support, c'est-à-dire par le torseur cinématique du mouvement de (Σ) dans le référentiel lié à (Σ_0) . Les éléments de réduction de ce torseur au lieu du contact sont la *vitesse de glissement* \vec{v}_g et le vecteur instantané de *roulement et pivotement* $\vec{\Omega}_{rp}$:

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{I \in \Sigma / \Sigma_0} = \vec{v}_{I \in \Sigma} - \vec{v}_{I \in \Sigma_0} \quad \vec{\Omega}_{rp} = \Omega_r \vec{u} + \Omega_p \vec{n} \quad (9.15)$$

où la vitesse de glissement vérifie $\vec{v}_g \parallel (\Pi)$ (pour éviter toute interpénétration des solides) tandis que la décomposition de $\vec{\Omega}_{rp}$ fait apparaître un terme de *pivotement* $\Omega_p \vec{n}$ et un terme de *roulement* $\Omega_r \vec{u}$, où $\vec{u} \parallel (\Pi)$.

9.4.2 - Frottement de glissement

Lorsque les forces de frottement peuvent être considérées comme ponctuelles, leur point d'application est $I \in \Sigma$ ou $I \in \Sigma_0$ respectivement et on parle de *frottement de glissement*, entièrement décrit par la résultante \vec{F} des actions exercées par le support sur le mobile, avec pour puissance *totale* des actions de contact $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{I \in \Sigma} + (-\vec{F}) \cdot \vec{v}_{I \in \Sigma_0}$ donc $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_g$. Cette puissance est aussi celle des actions exercées sur le *seul mobile* (Σ) dans le cas particulier où le support (Σ_0) est *fixe* dans le référentiel d'étude (K) .

Ce frottement est en général décrit par les lois phénoménologiques de Coulomb, décomposant $\vec{F} = \vec{N} + \vec{T}$, où \vec{N} est perpendiculaire à (Π) et \vec{T} contenu dans (Π) , selon :

LOIS DE COULOMB DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT

La réaction normale est toujours dirigée du support vers le mobile ($\vec{N} \cdot \vec{n} > 0$) sauf lors du décollage ($\vec{N} = \vec{0}$).

Les modules T et N des réactions normale et tangentielle vérifient, en l'absence de glissement ($\vec{v}_g = \vec{0}$), $T \leq f_s N$ et, en phase de glissement, $T = f_d N$, où les coefficients de frottement statique f_s et dynamique f_d vérifient $f_s \geq f_d$.

Enfin, en phase de glissement, \vec{T} est colinéaire à \vec{v}_g et de sens contraire.

La puissance des actions de contact vérifie alors $\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v}_g$; remarquons qu'il s'agit de la puissance de forces *intérieures* ; leur expression est donc indépendante du choix du référentiel (K) . Enfin, Cette puissance peut s'annuler dans deux cas :

- les réactions *sans frottement*, pour lesquelles $\vec{T} = \vec{0}$;
- les mouvement *sans glissement*, pour lesquels $\vec{v}_g = \vec{0}$.

mais dans le cas général du *glissement*, $\mathcal{P} < 0$.

9.4.3 - Frottement sur pivot et rotule

Les articulations entre un solide mobile (Σ) et son support (Σ_0) peuvent prendre la forme d'un pivot (assurant un mouvement autour d'un point fixe O , cf. fig. 9.5 à gauche) ou d'une rotule (assurant un mouvement autour d'un axe fixe (Oz) , cf. fig. 9.5 à droite).

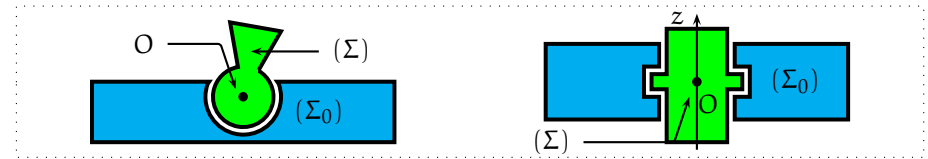


FIG. 9.5 – Liaison rotule (à gauche) et pivot (à droite)

Dans les deux cas, la répartition du contact sur une surface (sphérique pour une rotule, cylindrique pour un pivot) empêche de considérer les actions comme ponctuelles ; on notera \vec{R} le résultante et $\vec{\Gamma}_O$ le moment en O des actions exercées par (Σ_0) sur (Σ) . La puissance totale de ces actions de contact s'écrit alors $\mathcal{P} = \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{\Omega}_\Sigma$ puisque $\vec{v}_{O \in \Sigma} = \vec{0}$ dans le référentiel du support (Σ_0) .

Dans le cas d'une liaison rotule, le vecteur $\vec{\Omega}_\Sigma$ peut prendre toutes les directions possibles ; on dira que la liaison est une *rotule parfaite* (sans frottement) si :

$$\mathcal{P}_{rotule \rightarrow \Sigma} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{\Gamma}_O = \vec{0} \quad (9.16)$$

tandis que, pour une liaison rotule, $\vec{\Omega}_\Sigma \parallel \vec{e}_z$ donc la condition de réalisation d'un *pivot parfait* (sans frottement) est moins contraignante :

$$\mathcal{P}_{pivot \rightarrow \Sigma} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{e}_z = 0 \quad (9.17)$$