

# 7 — CONDUCTION THERMIQUE

## 7.1 – Transferts thermiques

### 7.1.1 - Modes de transfert thermique

Les transferts thermiques correspondent, on l'a vu, à des transports d'énergie associés à des variables microscopiques qui disparaissent lors de la moyenne statistique effectuée sur le grand nombre  $N$  de particules d'un système thermodynamique (voire même sur le nombre  $dN$  de particules d'un élément mésoscopique de volume  $d\tau$  du même système).

Comme le montre le modèle du gaz parfait, la variable intensive  $T$  associée à ces transferts est une mesure de l'*agitation thermique* des  $dN$  entités (atomes, molécules, etc.) contenues dans le système étudié. Ce chapitre propose une modélisation de la puissance thermique  $d\mathcal{P}_t$  reçue par le système de volume  $d\tau$  ou, ce qui revient au même, du transfert thermique  $\delta^2Q = d\mathcal{P}_t \times \delta t$  associé, pour une durée infinitésimale  $\delta t$ .

La variation (croissance ou décroissance) de l'agitation thermique des  $dN$  molécules du système étudié peut avoir plusieurs origines physiques. D'abord, l'énergie cinétique peut, comme toute autre grandeur extensive, être transportée par le déplacement macroscopique des entités qui composent le système. Un tel transport d'énergie porte le nom de *convection thermique* et ne s'observe que dans le cas des fluides. En l'absence d'étude de dynamique des écoulements fluides, nous ne donnerons que des éléments très succincts relatifs à ce phénomène.

Ensuite, les chocs entre molécules rapides (vitesse quadratique  $u_c$ , température  $T_c$ ) et molécules plus lentes (vitesse quadratique  $u_f < u_c$ , température  $T_f < T_c$ ) se traduisent en général par un transfert d'énergie : après le choc,  $u'_c < u_c$  et  $u'_f > u_f$ . Ce transfert thermique *en volume*, par contact direct (et qu'on rencontre, en l'absence de transfert macroscopique de matière, aussi bien dans un solide que dans un fluide), porte le nom de *conduction thermique*. Il fait l'objet de l'étude présenté ici.

Enfin, le transport immatériel d'énergie associé au rayonnement électromagnétique (rayonnement lumineux ou infrarouge par exemple) permet un transfert d'énergie à travers le vide ou tous les milieux transparents ; on parle de *rayonnement thermique* pour l'aspect purement énergétique de ce phénomène, qui en comporte d'autres (rayonnement et propagation d'ondes) et sera étudié ultérieurement.

Par ailleurs, indépendamment de tout transfert de proche en proche, on peut rencontrer des phénomènes de création (algébrique) locale dans un milieu donné, en présence de *sources thermiques*. Ces sources peuvent être insérées dans le système (résistance chauffante plongée dans un fluide) et se traduire par l'existence d'un *apport thermique pariétal* ou bien être dispersées dans le système (réaction chimique exothermique en cours) et se traduire par une *création thermique locale* répartie en volume.

### 7.1.2 - Courants thermiques

Rappelons  $\oint \left( h + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + gz \right) d\mathcal{D} + \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \left( u + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + gz \right) d\tau = \mathcal{P}_t + \mathcal{P}_u$ , forme usuelle du premier principe de la Thermodynamique pour un système ouvert. Dans cette expression, l'*effet* des apports thermiques (et des éventuels apports mécaniques utiles) est, entre autres, un transport d'enthalpie sortant (algébriquement) des limites ( $\Sigma$ ) du système étudié sous la forme  $\oint \rho h \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \oint \vec{j}_H \cdot \vec{n} dS$ , en définissant une densité volumique de courant d'enthalpie (ou *advection*)  $\vec{j}_H = \rho h \vec{v}$  associé au déplacement de matière.

On peut évidemment décrire de la même façon les phénomènes convectifs, déjà présents explicitement dans l'expression du premier principe sous la forme  $\oint \vec{j}_{ec} \cdot \vec{n} dS$  avec un courant d'énergie cinétique  $\vec{j}_{ec} = \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 \vec{v}$ .

Nous *admettrons* donc que les deux autres phénomènes de transfert thermique peuvent être décrits par des grandeurs analogues, le *courant thermique conductif*  $\vec{j}_c$  et le *courant thermique radiatif*  $\vec{j}_r$ . Ces deux grandeurs se mesurent, comme  $\vec{j}_H$  et  $\vec{j}_{ec}$  en watt par mètre carré et leurs flux *entrants* dans le système décrivent les puissances conductive et radiative reçue par le système :

$$\mathcal{P}_c = -\oint \vec{j}_c \cdot \vec{n} dS \quad \mathcal{P}_r = -\oint \vec{j}_r \cdot \vec{n} dS \quad (7.1)$$

### 7.1.3 - Bilans thermiques

Dans toute la suite, nous nous placerons dans le cadre de l'étude d'un système immobile, opaque, à énergie cinétique massique  $\bar{v}^2/2$  et énergie potentielle massique  $gz$  négligeables, ne recevant aucun travail utile; le premier principe de la Thermodynamique prend alors la forme du bilan thermique  $\oint (\vec{j}_H + \vec{j}_c + \vec{j}_r) \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int \rho u d\tau = \mathcal{P}'_t$ , où on a noté  $\mathcal{P}'_t$  la somme des puissances thermiques reçues *autres que conductive et radiative*, comme par exemple les puissances créées à la frontière ou en volume.

S'il s'agit de transferts thermiques *pariétaux*, on pourra encore les décrire comme une répartition sur la surface extérieure ( $\Sigma$ ) du système, selon  $\mathcal{P}_p = -\oint j_p dS$  (le « courant » scalaire étant compté positivement vers l'extérieur du système). S'il s'agit au contraire de créations en volume, on fera apparaître une densité volumique de puissance localement créée,  $\frac{d\mathcal{P}'}{d\tau} = p_\ell$ . Un bilan thermique global prend donc la forme générale  $-\oint_{(\Sigma)} [j_p + (\vec{j}_H + \vec{j}_c + \vec{j}_r) \cdot \vec{n}] dS = \int_{(V)} \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - p_\ell \right] d\tau$ . Dans cette équation, nous ferons en général dans ce qui suit l'approximation consistant à négliger les transports de matière donc le courant d'advection  $\vec{j}_H$ ; de plus, la densité volumique d'énergie interne  $u_V = \rho u$  est liée aux évolutions de la température du système. Dans le cas fréquent des évolutions isochores, on pourra noter  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial T} = \rho c_V$  (si  $c_V$  est la capacité thermique massique isochore locale du système) donc, puisqu'aucune variable thermodynamique autre que  $T$  ne varie,  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial T} = \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t}$  sous réserve que  $\rho c_V$  soit indépendant de la température. On généralise ce résultat en définissant la *capacité thermique dans les conditions de l'évolution*  $c$  (massique) de sorte que  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial T} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ ; il vient alors pour l'équation de bilan thermique la forme simplifiée :

$$-\oint_{(\Sigma)} [j_p + (\vec{j}_c + \vec{j}_r) \cdot \vec{n}] dS = \int_{(V)} \left[ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - p_\ell \right] d\tau \quad (7.2)$$

### 7.1.4 - Formes locales du bilan thermique

Dans l'équation de bilan thermique (7.2), les puissances radiative et pariétale entrantes jouent le rôle de *conditions aux limites* pour la résolution d'équations différentielles dont  $T$  est la solution; ces termes ne peuvent être présents qu'à la surface extérieure du système étudié :

- par définition même, dans le cas des transferts pariétaux;
- car le système est opaque, dans le cas des transferts radiatifs.

Pour un volume ( $V$ ) situé complètement à l'intérieur du système ( $S$ ), il reste donc  $\oint_{(\Sigma)} \vec{j}_c \cdot \vec{n} dS + \int_{(V)} \left[ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - p_\ell \right] d\tau = 0$ , ce que le théorème d'Ostrogradski permet de transformer selon l'intégrale unique  $\int_{(V)} \left[ \text{div} \vec{j}_c + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - p_\ell \right] d\tau = 0$ . Cette intégrale ne peut être nulle pour tout ( $V$ ) que si, en tout point de l'intérieur du système, on vérifie l'équation de bilan thermique local :

$$\text{div} \vec{j}_c + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p_\ell \quad (7.3)$$

qui, en l'absence de terme de création locale, s'identifie à une loi de conservation.

On peut aussi appliquer le bilan (7.2) à un volume de très faible épaisseur  $\epsilon$  situé au voisinage de la surface extérieure ( $\Sigma$ ) du système thermodynamique étudié. Si  $\epsilon \rightarrow 0$ , les intégrales de volume dans (7.2) sont négligeables et il ne reste que les flux surfaciques qui, du côté *extérieur* à ( $\Sigma$ ), ne comporte que les termes d'apport extérieur (radiatif, pariétal, etc.) et, du côté *intérieur* à ( $\Sigma$ ), les seuls termes conductifs. Il reste en général la *relation de passage* de part et d'autre de la surface extérieure du système étudié :

$$\vec{j}_{c,\text{int}} \cdot \vec{n} = (\vec{j}_{c,\text{ext}} + \vec{j}_r) \cdot \vec{n} + j_p \quad (7.4)$$

## 7.2 - Conduction thermique

### 7.2.1 - Loi de Fourier

**Justification phénoménologique** Considérons un milieu présentant un gradient thermique  $\vec{\text{grad}} T$  colinéaire à  $\vec{e}_x$  (cf. fig. 7.1) :  $T(-\ell) < T(0) < T(\ell)$ . La distance  $\ell$  sera prise égale au *libre parcours moyen* des entités microscopiques dans le milieu, distance moyenne parcourue entre deux chocs. On a aussi représenté sur la figure la vitesse quadratique moyenne de ces entités.

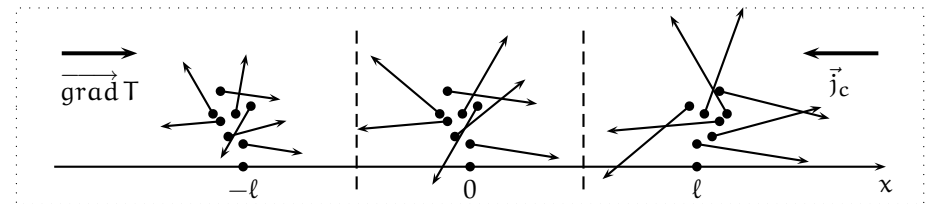


FIG. 7.1 - Gradient de température et conduction thermique

Le transfert d'énergie à travers la surface d'abscisse  $x = \pm \ell/2$  se fait alors dans le sens contraire à celui du gradient de  $T$  ; des particules de haute énergie franchissent en effet cette surface de gauche à droite (sur la fig. 7.1) tandis que des particules de plus faible énergie passent en sens inverse.

Au premier ordre du développement, l'énergie transférée est proportionnel à l'écart  $T(\ell) - T(0)$  avec aussi  $T(\ell) - T(0) \simeq \frac{dT}{dx} \times \ell$ . Nous admettrons la généralisation de ce résultat sous la forme de la *loi de Fourier* de la conduction thermique :

$$\vec{j}_c = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (7.5)$$

où la *conductivité thermique*  $\lambda$  est une caractéristique du milieu matériel étudié ;  $\lambda$  se mesure en watt par mètre et par kelvin. Cette loi phénoménologique est l'exact équivalent formel de la loi d'Ohm de la conduction en régime permanent électrique,  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  soit aussi  $\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$ .

**Loi de Fourier et irréversibilité** Considérons alors un système thermodynamique vérifiant la loi de Fourier, caractérisé par l'entropie massique  $s$ . Le transfert thermique reçu par un élément de surface  $dS$  orienté par  $\vec{n}$  vers l'extérieur de  $(S)$  s'écrit  $\delta Q = -\vec{j}_c \cdot \vec{n} dS \times \delta t$  et la température de la source qui fournit ce transfert étant  $T$  on peut écrire l'entropie échangée par unité de temps  $d \frac{\delta_e S}{\delta t} = -\lambda \frac{\overrightarrow{\text{grad}} T}{T} \cdot \vec{n} dS$ . L'entropie échangée par unité de temps par le système est donc  $\frac{\delta_e S}{\delta t} = -\oint_{(\Sigma)} \vec{j}_S \cdot \vec{n} dS$ , intégrale portant sur la surface extérieure  $(\Sigma)$  du système étudié, avec  $\vec{j}_S = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} \ln T$ . Le premier principe  $\Delta S = S_e + S_c$  pour un système fermé prend alors la forme  $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\delta_e S}{\delta t} + \frac{\delta_c S}{\delta t}$  en l'absence de tout flux d'entropie  $\mathcal{D}_S$  pour ce système sans écoulement ; on écrira donc ici :

$$\frac{\delta_c S}{\delta t} = \int_{(V)} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} d\tau - \oint_{(\Sigma)} \lambda \overrightarrow{\text{grad}} (\ln T) \cdot \vec{n} dS \geq 0 \quad (7.6)$$

et l'équation (7.6) exprime l'irréversibilité des transferts thermiques conductifs, qui tendent toujours à l'homogénéisation des température (en l'absence d'autres causes) puisque les transferts sont dirigés des zones chaudes vers les zones froides.

### 7.2.2 - Bilan thermique et opérateur de Laplace

Dans les milieux qui vérifient la loi de Fourier, et si la conductivité thermique  $\lambda$  est uniforme, l'équation de bilan thermique interne (7.3) prend la forme de l'équation de diffusion thermique :

$$-\lambda \Delta T + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p_\ell \quad (7.7)$$

en définissant l'opérateur *laplacien scalaire* par la relation générale :

$$\Delta f = \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (7.8)$$

d'où on peut déduire la notation symbolique  $\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$ , qui permet de retrouver l'expression du laplacien en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (7.9)$$

Signalons aussi les expressions des opérateurs divergence et laplacien dans les autres systèmes de coordonnées, pour la résolution de (7.7), considérée comme une équation différentielle pour  $(\vec{r}, t)$  ; en coordonnées cylindro-polaires  $(\rho, \varphi, z)$  :

$$\text{div} \vec{W} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho W_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial W_z}{\partial z} \quad (7.10)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

et en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  :

$$\text{div} \vec{W} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 W_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} \quad (7.11)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

### 7.2.3 - Diffusivité thermique

**Équation de diffusion** En l'absence de terme de création locale, l'équation de diffusion thermique (7.7) prend la forme de l'*équation de diffusion* :

$$D \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (7.12)$$

en fonction de la *diffusivité thermique*  $D$ . Ce coefficient, qui se mesure en mètres carrés par seconde, caractérise l'équation différentielle (7.12) qui régit de nombreux phénomènes irréversibles (on reconnaît l'intervention de l'irréversibilité dans la dérivée *première* temporelle : cette équation n'est pas invariante par renversement du sens du temps).

Le coefficient  $D$  se mesure donc en mètres carrés par seconde, comme tout coefficient de diffusion. On peut l'interpréter comme  $D \sim L^2/T$  où  $L$  est une évaluation de la dimension caractéristique du système dans le sens de la diffusion, et  $T$  l'ordre de grandeur de la dimension correspondante. On peut retrouver cette évaluation dans la résolution classique de certains problèmes de diffusion thermique.

Malgré la grande variété des milieux étudiés, le coefficient  $D$  est souvent du même ordre de grandeur pour la diffusion thermique, en général quelques  $\text{mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Avec une épaisseur de l'ordre de grandeur de quelques cm au moins, la plupart des systèmes thermodynamiques sont caractérisés par des durées caractéristiques des transferts thermiques de l'ordre de plusieurs minutes :

#### ÉQUATION DE DIFFUSION ET TRANSFERT THERMIQUE

Les transferts thermiques sont en général des phénomènes *lents*, caractérisés par des durées  $T \sim L^2/D$ . On peut donc souvent considérer une évolution rapide comme adiabatique.

**Effet de peau thermique** Considérons un régime oscillant de pulsation  $\omega$  avec une variation spatiale à une seule dimension,  $T(x, t) = T_0 + \Re \{ \bar{f}(x) \exp(i\omega t) \}$ . Une telle répartition de température sera solution de l'équation de diffusion (7.12) dans un milieu semi-infini  $x > 0$  seulement si  $D \frac{d^2 \bar{f}}{dx^2} = i\omega \bar{f}$ , donc si  $\bar{f}(x) = \bar{f}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}(1+i)\right)$  en posant

$\delta = \sqrt{\frac{D}{\omega}}$ , épaisseur de peau de la diffusion thermique ( $\delta \sim L$  si  $\omega \sim 1/T$ ).

On obtient donc une loi de répartition de température dans ce milieu qui fait apparaître un phénomène d'*atténuation* sur une épaisseur  $\delta$ , multiplié par un déphasage progressif de la température au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la surface  $x = 0$  du milieu diffusif :

$$T(x, t) = T_0 + |\bar{f}_0| \underbrace{\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)}_{\text{atténuation}} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \arg(\bar{f}_0)\right)}_{\text{propagation}}$$

On dira que les écarts de températures (imposés en surface  $x = 0$  par exemple par les variations nyctémérales ou annuelles d'éclairement solaire) se *propagent* en profondeur sous forme d'une *onde thermique atténuée*; la distance caractéristique à la fois de la propagation et de l'atténuation est l'épaisseur de peau thermique  $\delta$ , qui est d'autant plus courte que le phénomène est rapide.

#### 7.2.4 - Conductance thermique en régime permanent

Dans le cas particulier du régime permanent, l'équation de diffusion thermique prend la forme de l'équation de Laplace  $\Delta T = 0$ . Les solutions de cette équation sont clas-

siques dans certaines hypothèses : les problèmes unidimensionnels en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

**Solution unidimensionnelle cartésienne** C'est le cas où  $T(\vec{r}) = T(x)$  par exemple; avec  $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ , il vient pour  $T$  une solution affine et par exemple  $T(x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\ell} x$  de sorte que  $T(0) = T_0$ ,  $T(\ell) = T_1$  et  $\vec{j}_c = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{\ell} \vec{e}_x$  est uniforme.

**Solution unidimensionnelle cylindrique** C'est le cas où  $T(\vec{r}) = T(\rho)$  ne dépend que de la distance à  $(Oz)$ , donc  $\Delta T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = 0$  soit aussi  $T(\rho) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\ln(b/a)} \ln(\rho/a)$  pour que  $T(a) = T_0$ ,  $T(b) = T_1$  et  $\vec{j}_c = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho$  décroît en s'éloignant de cet axe  $(Oz)$  de manière à conserver le flux thermique  $2\pi \rho \vec{j}_c \cdot \vec{e}_\rho$  à travers un cylindre de hauteur unitaire et de rayon  $\rho$  quelconque.

**Solution unidimensionnelle sphérique** C'est en fin le cas où  $T(\vec{r}) = T(r)$  ne dépend que de la distance à  $O$ , donc  $\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$  soit  $T(r) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{1/b - 1/a} (1/r - 1/a)$  pour que  $T(a) = T_0$ ,  $T(b) = T_1$  et  $\vec{j}_c = \lambda \frac{T_1 - T_0}{1/b - 1/a} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$  décroît en s'éloignant de ce point  $O$  de manière à conserver le flux thermique  $4\pi r^2 \vec{j}_c \cdot \vec{e}_r$  à travers une sphère de rayon  $r$  quelconque.

**Conductance thermique** Considérons enfin deux surfaces  $(S_1)$  et  $(S_2)$  à températures fixées  $T_1$  et  $T_2 > T_1$ , séparées par un milieu de conductivité thermique  $\lambda$ , en régime permanent (cf. fig. 7.2). Les lignes de champ de  $\vec{j}_c$  sont dirigées dans le sens de la décroissance des températures et leur flux à travers une surface  $(\Sigma)$  coupant le milieu conducteur n'importe où entre les deux surfaces  $(S_1)$  et  $(S_2)$  est noté  $\mathcal{P}_c$ .

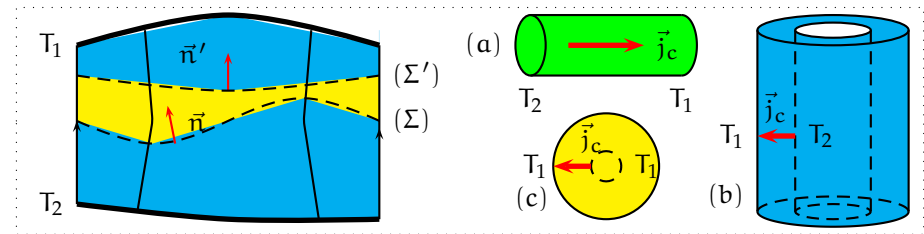


FIG. 7.2 – Conductance thermique

Cette puissance thermique transférée par conduction ne dépend pas du choix de la surface  $(\Sigma)$ ; en effet, le vecteur  $\vec{j}_c$  est ici à *flux conservatif*. Si on réunit deux surfaces  $(\Sigma)$

et  $(\Sigma')$  de même orientation avec les éléments d'un tube de champ (lignes parallèles à  $\vec{j}_c$ ) nécessaires à la formation d'une surface fermée (son intérieur est représenté en clair sur la fig. 7.2), on peut lui appliquer le théorème d'Ostrogradski :  $\oint_{\Sigma \cup \mathcal{T} \cup \Sigma'} \vec{j}_c \cdot \vec{n} dS = 0$  car  $\text{div} \vec{j}_c = 0$ . On peut généraliser ce résultat :

#### VECTEURS À FLUX CONSERVATIF

Tout champ de vecteur à divergence nulle ( $\text{div} \vec{W} = 0$ ) est à flux conservatif : le flux de  $\vec{W}$  est nul à travers une surface fermée ou, ce qui revient au même, le flux de  $\vec{W}$  se conserve le long de diverses sections coupant un même tube de champ, appuyé sur les lignes de champ de  $\vec{W}$ .

Pour le tube de champ  $\mathcal{T}$ ,  $\vec{j}_c \cdot \vec{n} = 0$  et il reste  $\oint_{\Sigma \cup \Sigma'} \vec{j}_c \cdot \vec{n} dS = -\mathcal{P}_{c,\Sigma'} + \mathcal{P}_{c,\Sigma} = 0$ , ce qui constitue le résultat attendu : en l'absence de toute accumulation thermique, la puissance thermique émise par le plan chaud  $T_2$  est entièrement transmise par toutes les surfaces intermédiaires et reçue par le plan froid  $T_1$ .

D'autre part, cette puissance se met sous la forme  $\mathcal{P}_c = \int_{(\Sigma)} -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \vec{n} dS$ , tandis qu'on peut écrire  $T_2 - T_1 = \int_{(S_1)}^{(S_2)} \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot d\vec{r}$ . La détermination de ces deux grandeurs impose donc le calcul de  $\overrightarrow{\text{grad}} T$ , donc de  $T$  solution de l'équation différentielle linéaire  $\Delta T = 0$ . L'ajout d'une constante quelconque à  $T$  ne change aucune de ces deux intégrales car la constante disparaît dans le calcul du gradient ; la multiplication de  $T$  par une constante quelconque multiplie par la même constante le gradient de température mais laisse donc inchangé le quotient de ces deux intégrales, qui ne dépend que de la géométrie du système et définit la *conductance thermique* du système :

$$G_t = \frac{\mathcal{P}_t}{T_2 - T_1} = \frac{\int_{(\Sigma)} -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \vec{n} dS}{\int_{(S_1)}^{(S_2)} \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot d\vec{r}} \quad (7.13)$$

qui est complètement analogue de la définition de la conductance *électrique*  $G = \frac{I}{V_2 - V_1}$  en remplaçant le flux thermique par le flux de charges (ou courant électrique  $I$ ) : on obtiendra évidemment les mêmes résultats pour une même géométrie en remplaçant la conductance thermique  $\lambda$  par la conductance électrique  $\gamma$ , ce qui permet aussi de définir une résistance thermique  $R_t = \frac{T_2 - T_1}{\mathcal{P}_t}$ , et les associations de résistances et conductances en série (même flux, addition des écarts de température) et en parallèle (même écart de température, addition des flux thermiques), avec :

$$\frac{G_t}{\lambda} = \frac{G}{\gamma} \quad \text{et} \quad R_t = \frac{1}{G_t} \quad (7.14)$$

Dans le cas particulier d'un *cylindre* (à base quelconque de section droite  $s$ , de longueur  $\ell$ , fig. 7.2, (a)) à conduction *longitudinale*, la solution unidimensionnelle cartésienne impose  $\vec{j}_c = \frac{\lambda}{\ell} (T_2 - T_1) \vec{e}_x$  donc  $\mathcal{P}_t = \frac{\lambda s}{\ell} (T_2 - T_1)$  et on a pour conductance thermique dans cette géométrie  $G_t = \lambda \frac{s}{\ell}$ .

Dans le cas d'un *manchon cylindrique* (de rayons compris entre  $r = a$  et  $r = b > a$ , de hauteur  $\ell$ , fig. 7.2, (b)) à conduction *radiale*, la solution unidimensionnelle cylindrique impose  $\vec{j}_c = \frac{\lambda}{\ln(b/a)} (T_2 - T_1) \frac{\vec{e}_r}{r}$  donc  $\mathcal{P}_t = \frac{2\pi\lambda\ell}{\ln(b/a)} (T_2 - T_1)$  et on a ici  $G_t = \frac{2\pi\lambda\ell}{\ln(b/a)}$ .

Dans le cas d'une *couche sphérique* (comprise entre  $r = a$  et  $r = b > a$ , fig. 7.2, (c)), la solution unidimensionnelle sphérique impose  $\vec{j}_c = \frac{\lambda}{1/a - 1/b} (T_2 - T_1) \frac{\vec{e}_r}{r^2}$  d'où on déduit  $\mathcal{P}_t = \frac{4\pi\lambda}{1/a - 1/b} (T_2 - T_1)$  et on a ici  $G_t = \frac{4\pi\lambda}{1/a - 1/b}$ .

## 7.3 – Transfert thermique pariétal

### 7.3.1 - Description d'une paroi

Considérons un milieu conducteur thermique solide (ou liquide) emplissant le demi-espace  $x < 0$ , séparé par la paroi  $x = 0$  d'un autre milieu conducteur liquide (ou gazeux) emplissant le demi-espace  $x > 0$ . Si la discontinuité des propriétés physiques est peu marquée (cf. fig. 7.3 à gauche), et en l'absence de tout phénomène thermique autre que conductif, on observera un profil de température continu mais non dérivable.

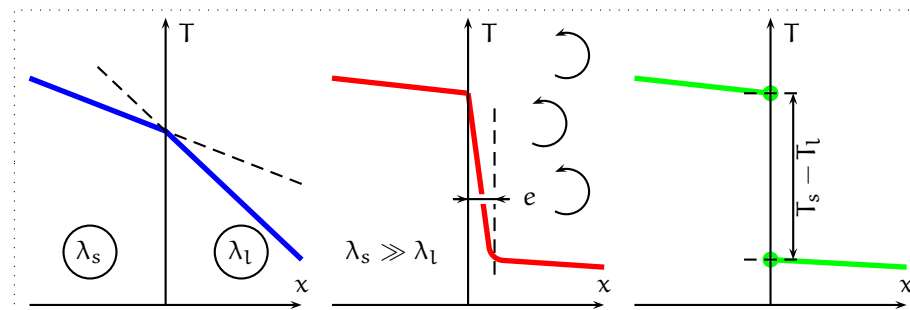


FIG. 7.3 – Transfert thermique pariétal

En effet, la continuité du flux thermique (7.4) imposant  $-\lambda_s \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0^-} = -\lambda_l \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0^+}$  ; sur le tracé, on a supposé que la conductivité thermique du liquide  $\lambda_l$  est plus faible que celle  $\lambda_s$  du solide. La chute importante de température dans le milieu liquide ne peut pas se produire sur une très grande distance et, si on accentue la discontinuité des propriétés physiques avec  $\lambda_s \gg \lambda_l$ , on observera un profil du type de celui présenté fig. 7.3 au centre : une mince *couche limite* de faible épaisseur  $e$  dans le fluide circulant au voisinage de la paroi concentre l'essentiel des variations de température, celle-ci variant plus lentement au-delà de la paroi, surtout si on prend maintenant en compte l'homogénéisation de température apporté par la *convection thermique*, associée à la circulation naturelle ou forcée du fluide.

### 7.3.2 - Loi de Newton

On remplace souvent une telle description par un modèle simplifié (fig. 7.3 à droite) dans lequel :

- dans le milieu solide (ou liquide)  $x < 0$ , les transferts thermiques sont purement conductifs, avec une variation lente de la température caractérisée par la conductivité thermique  $\lambda_s$  et avec pour flux thermique parvenant en  $x = 0^-$  la valeur limite  $j_c(0^-) = -\lambda_s \frac{dT}{dx} \Big|_{0^-}$  ;
- à travers la couche limite (dont on néglige l'épaisseur  $e$ ) une variation brutale de la température liée à un flux *essentiellement conductif* se traduit par un flux thermique *pariétal* qu'on évalue par  $j_p(0) \sim -\lambda_l \frac{T(x=e) - T(x=0^-)}{e}$ . Ce terme dépendant à la fois des phénomènes conductifs (via  $\lambda_l$ ) et de la circulation du fluide (via la valeur de l'épaisseur  $e$ ), on le qualifie de courant thermique pariétal *convecto-conductif* ;
- enfin, pour  $x > 0$ , les transferts thermiques essentiellement convectifs ne sont pas décrits ici.

et, si ce modèle s'applique, le flux pariétal sortant d'une surface ( $\Sigma$ ) de paroi limitant un système thermodynamique prend la forme :

$$j_p = h (T_{(S)} - T_{\text{ext}}) \quad (7.15)$$

où  $h \sim \lambda_l/e$  est le coefficient de transfert pariétal de la *loi de Newton* (7.15), qui est d'autant plus élevé que le fluide extérieur est un bon conducteur thermique avec une circulation de fluide active, tandis qu'on a noté  $T_{(S)}$  la température du système au voisinage de sa paroi, et  $T_{\text{ext}}$  la température du fluide extérieur à ( $S$ ), au-delà de la couche limite.

Plus généralement, la loi de Newton (7.15) intervient soit dans les conditions aux limites, soit dans l'établissement de l'équation différentielle régissant les variations de

température (cf. ci-dessous l'étude d'une ailette). On peut encore traiter dans le même cadre les deux cas particuliers :

- d'un très bon contact thermique,  $h \rightarrow \infty$  donc  $T_{(S)} = T_{\text{ext}}$  ;
- d'une très bonne isolation thermique,  $h \rightarrow 0$  donc  $j_p \rightarrow 0$ .

### 7.3.3 - Exemple : étude d'une ailette

Le flux pariétal (7.15) sert, via la relation de passage (7.4), de condition limite pour la résolution des équations de bilan thermique. Considérons par exemple une ailette cylindrique de rayon  $a$  et de longueur  $L$ , constituée d'un matériau conducteur thermique de conductivité  $\lambda$ . À son extrémité  $x = 0$  elle est soudée au système à refroidir (de température  $T_c$ ) et tout le reste de sa surface baigne dans un fluide de température  $T_f$ .

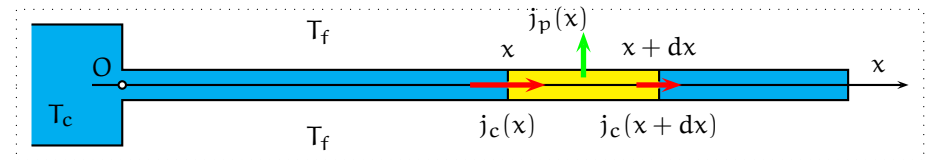


FIG. 7.4 - Ailette

En régime permanent, le bilan thermique d'une section d'ailette comprise entre  $x$  et  $x + dx$  s'écrit  $\delta Q = 0$  donc  $\pi a^2 (j_c(x) - j_c(x + dx)) - 2\pi a dx h (T(x) - T_f) = 0$  ou, compte tenu de la loi de Fourier,  $\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{T(x) - T_f}{\ell^2}$  en posant  $\ell = \sqrt{\frac{a\lambda}{2h}}$ . La solution  $T(x) = T_f + A \operatorname{ch}(x/\ell) + B \operatorname{sh}(x/\ell)$  peut être complètement déterminée en utilisant les deux conditions aux limites  $T(0) = T_c$  et  $-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h (T(L) - T_f)$ . Dans le cas simple où  $L \gg \ell$  (approximation d'ailette infinie), on trouve  $T(x) = T_f + (T_c - T_f) \exp(-x/\ell)$  ; la puissance totale évacuée par l'ailette est alors donnée par  $\mathcal{P}_t = -\pi a^2 \lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}$  qui prend la forme  $\mathcal{P}_t = G_t (T_c - T_f)$  avec pour conductivité thermique équivalente de l'ailette  $G_t = \pi a \sqrt{2ah\lambda}$ .