

## TP : Transferts thermiques dans une barre

Nous allons dans ce TP étudier le transfert thermique, dans une barre de cuivre cylindrique de rayon  $r$  petite devant sa longueur  $L$ . Ainsi, on considère le système comme unidimensionnel décrit par la coordonnée  $x$ .

La barre en cuivre est caractérisée par les grandeurs suivantes :

- son rayon est  $r = 1$  cm,
- sa longueur est  $L \simeq 1,50$  m
- sa conductivité thermique est  $\lambda = 390 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,
- sa capacité thermique massique  $c$  et sa masse volumique  $\mu$ , tels que sa diffusivité thermique est :

$$a = \frac{\lambda}{\mu c} = 114 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Le transfert thermique est de type conductif dans la barre, mais aussi convectif avec l'air ambiant supposé à température constante  $T_0$  sans doute  $20^\circ \text{C}$ . Cette température sera aussi celle de toute la barre avant le branchement du four à l'extrémité  $x = 0$ . Le transfert convectif sera caractérisé par le coefficient  $h$ .

On notera  $T(x, t)$  la température de la barre à l'abscisse  $x$  et à la date  $t$ . On notera  $\theta(x, t)$ , l'écart à la température de l'air ambiant :  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0$ .

### A. Mise en route du chauffage et mesure de la température

Une seule barre sera mise en fonction pour l'ensemble des groupes travaillant sur ce TP.

La barre sera chauffée à une extrémité par un four électrique alimenté par un générateur de tension alternative de 110 V, qu'on réglera sur la position 80. Le four sera mis en fonctionnement un peu avant de le mettre en contact avec la barre, la durée de préchauffage sera de 10 minutes. 8 capteurs de température de type LM335 seront disposés aux abscisses suivantes :  $x = 0$ ;  $x = 0,1$ ;  $x = 0,2$ ;  $x = 0,3$ ;  $x = 0,4$ ;  $x = 0,6$ ;  $x = 0,8$  et  $x = 1,1$  m. Un circuit électronique, que nous allons étudier assure, la conversion température-tension électrique acquise par la carte du logiciel *Synchronie*. La durée d'obtention du régime permanent étant de l'ordre de 1 heure, on a choisi comme paramètres d'acquisition : 1800 points de mesure séparés par une durée de 2 s. Comme les tensions mesurées ne seront que positives, on a choisi le calibre 0 à 10 V dans le logiciel d'acquisition. On lance ensuite l'enregistrement des températures.

Pendant le temps de chauffage de la barre pour atteindre le régime permanent, vous travaillerez sur des fichiers correspondant à des enregistrements que j'ai effectués. Utiliser en particulier JRBARRE4.SNC et JRBARRE6.SNC, vous pouvez aussi consulter les autres fichiers. Ne rien sauvegarder afin de ne pas modifier ces fichiers.

### B. Étude du circuit électronique de conversion

Le montage que l'on utilise comporte un circuit intégré rassemblant 4 amplificateurs opérationnels que l'on supposera idéaux, en régime linéaire. Seuls trois AO sont en fait utilisés, comme vous allez le comprendre sur le schéma de la figure 1 :

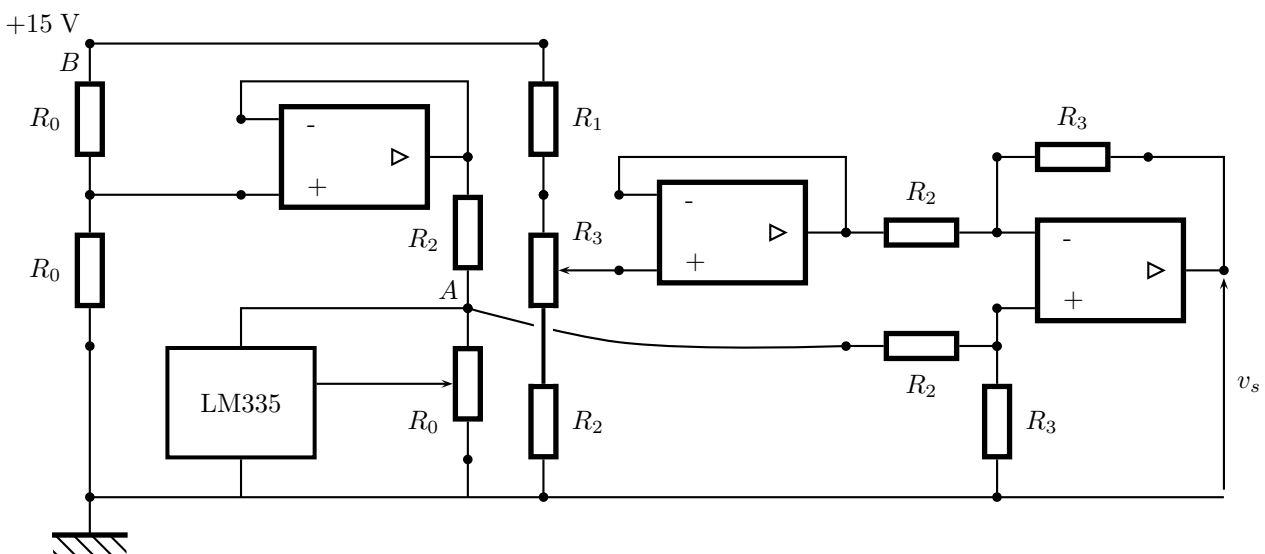


FIG. 1 – Circuit de conversion Température-Tension

Le point B du montage est relié au potentiel +15 V délivré par l'alimentation des amplificateurs opérationnels.

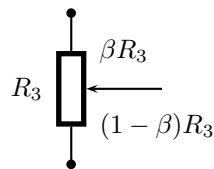


FIG. 2 – Réglage du potentiomètre

La résistance  $R_3$  est montée en potentiomètre sur l'entrée du second amplificateur opérationnel. Le réglage de ce potentiomètre sera défini par la constante  $0 < \beta < 1$  telle que l'on peut le voir sur le schéma de la figure 2. Les valeurs des résistances utilisées sont :  $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = 18 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$  et  $R_3 = 5 \text{ k}\Omega$ .

Le principe de fonctionnement du LM335 est basé sur l'évolution de la tension de seuil d'une diode en fonction de la température. Il est câblé de telle sorte que la tension  $V_A$  soit de  $10 \text{ mV} \cdot \text{K}^{-1}$ . On peut écrire :

$$V_A = \frac{T(\text{K})}{100} \quad \text{en} \quad \text{V}$$

Le potentiomètre décrit sur la figure 2 est réglé de telle sorte qu'en sortie la tension  $v_s$  soit reliée simplement à la température en  $^\circ\text{C}$  selon :

$$v_s = \frac{t(^\circ\text{C})}{20} \quad \text{en} \quad \text{V}$$

Ainsi lorsque la température est de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , la tension de sortie est de  $1 \text{ V}$ . Si on lit une tension en sortie de  $3 \text{ V}$ , cela signifie que la température est de  $60 \text{ }^\circ\text{C}$ . La lecture des enregistrements en est grandement facilitée.

- Déterminer la valeur de  $\beta$  qui permet d'obtenir la loi précédente pour  $v_s$ .

### C. Équation générale du transfert thermique

2. Établir par un bilan énergétique portant sur un morceau de barre de longueur  $dx$ , l'équation différentielle suivante donnant l'évolution de  $\theta(x, t)$  :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\theta}{\delta^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

où  $\delta = \sqrt{\frac{\lambda r}{2h}}$ .

- Donner la dimension de  $\delta$  et rappeler celle de  $a$ .

### D. Étude d'un régime transitoire

À la date  $t = 0$ , on impose une température  $T_1 > T_0$ . Les conditions initiales sont  $\theta(x > 0, t = 0) = 0$ . Les conditions aux limites sont  $\theta(x = 0, t > 0) = T_1 - T_0$  et en supposant la barre assez longue  $\theta(x = L, t > 0) = \theta(x \rightarrow \infty, t > 0) = 0$ . On négligera les pertes par convection car la barre a été isolée avec de la laine de verre.

4. Que devient l'équation différentielle lorsqu'on néglige les pertes par convection ? Montrer que  $j_{cond}(x, t)$  vérifie alors la même équation différentielle que  $\theta(x, t)$ .

Dans ce cas particulier, nous allons vérifier que la solution ci-dessous convient au problème. Appelons  $F(X)$  la fonction définie par l'intégrale suivante :

$$F(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_X^\infty \exp -u^2 du$$

avec  $X = \sqrt{\frac{x^2}{\alpha t}}$ .

On note que  $F(0) = 1$ .

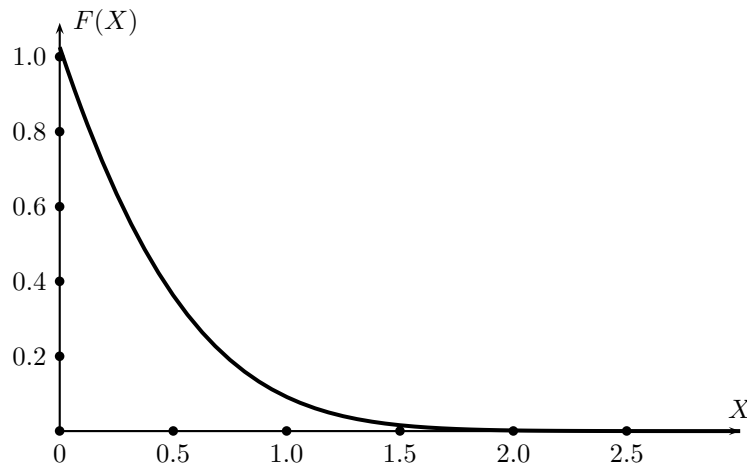
- Vérifier que  $F(X)$  est bien solution à condition que :  $\alpha = 4a$ .

- Calculer la valeur de  $\alpha$  et donner son unité.

Afin de pouvoir trouver une solution littérale à l'équation différentielle du régime transitoire étudié, on travaillera avec une forme approchée de  $F(X)$  ; cette forme est proposée après avoir observé le graphique de  $F(X)$  en fonction de  $X$  donné sur la figure 3.

On propose pour le début du régime transitoire un vecteur densité de courant de transfert thermique défini par :

$$j_{cond}(x, t) = j_0 F(x, t)$$

FIG. 3 – Graphe de la fonction  $F(X)$ 

7. Vérifier que cette solution convient aussi pour les conditions limites, on rappelle que la barre est supposée infinie et que sa température à l'extrémité non chauffée est uniforme dans la partie finale et vaut  $T_0$ . Les conditions limites, ici, portent sur le flux surfacique d'énergie.

Nous allons nous intéresser à la valeur  $X$  à laquelle la fonction  $F(X)$  est presque égale à zéro. On propose de retenir  $X_0 = 1,5$  (cela représente environ 4% d'écart avec la réalité, en dessous, il est difficile de décider d'une limite car la courbe vient en asymptote sur l'axe).

8. Représenter, pour la date  $t = 10$  s,  $j_{cond}(x, t)$ . En déduire l'abscisse à partir de laquelle il n'y a pas encore eu transfert thermique.

9. Pour les différentes abscisses  $x_i = 0, 1 ; 0, 2 ; 0, 3 ; 0, 4 ; 0, 5 ; 0, 6 ; 0, 7$  et  $0, 8$  m, trouver la date théorique  $t_i^d$  à partir de laquelle débute l'élévation de température. On pourra utiliser la courbe théorique  $t_i^d = \frac{x_i^2}{2,25 \times 4a}$  dans la feuille de calcul et demander le tracé de  $t_i^d = f(x_i)$ .

À l'aide des données du fichier JRBARRE4.SNC et des possibilités offertes par le logiciel, nous allons confronter la théorie et l'expérience. Il sera dans un premier temps nécessaire de mesurer les dates correspondant au début de l'élévation de température pour les différentes abscisses (en effectuer la saisie).

10. Dans le fichier proposé, repérer par un moyen de votre choix les valeurs expérimentales des dates de début d'élévation de température pour les abscisses  $x_i$ . Ces valeurs seront notées  $t_i^e$  pour les distinguer des valeurs théoriques.

11. Demander le tracé de  $t_i^e = f(x_i)$  dans la même fenêtre que celui de  $t_i^d = f(x_i)$ . Comparer la courbe obtenue en pratique avec la courbe théorique. Qu'en pensez-vous ?

### E. Étude d'un régime permanent

Nous allons maintenant étudier une situation qui est à opposer à la précédente. Comme vous allez le constater au cours de l'acquisition des températures faites depuis le début de la séance, on obtient un régime permanent après un temps de l'ordre de l'heure. Cela signifie que le transfert thermique par convection devient essentiel ! Si ce n'était pas le cas, la température d'un point de la barre ne cesserait d'augmenter. Nous allons maintenant étudier ce cas.

12. Quelle est maintenant l'équation différentielle à laquelle obéit  $\theta(x)$  ?

13. Résoudre cette équation, en n'oubliant pas la condition limite en  $x = 0$  où on posera  $\theta(x = 0) = \theta_0$  et celle en  $x = L$  où on considérera que  $L \rightarrow \infty$  en supposant que  $L \gg \delta$ , condition que l'on vérifiera en fin de TP.

En fonction du temps consacré à la première partie et de l'avancement de l'expérience lancée au début du TP, vous utiliserez soit le fichier JRBARRE6.SNC, soit les résultats expérimentaux obtenus pendant la séance. L'objectif est de tracer sur un papier millimétré ou sur l'ordinateur, lorsque le régime permanent est atteint,  $\ln \frac{\theta(x)}{\theta_0}$  en fonction de  $x$ .

14. Mesurer  $\theta_0$  et ensuite  $\theta(x)$  grâce aux possibilités offertes par le logiciel. Il ne faut pas oublier que  $\theta(x)$  n'est pas la température mais l'écart de cette température par rapport à  $T_0 = 20$  °C.

15. Tracer  $\ln \frac{\theta(x)}{\theta_0}$  en fonction de  $x$ . Déterminer la valeur de  $\delta$  et vérifier que l'hypothèse proposée en 13 est acceptable.

16. En déduire la valeur du coefficient de convection  $h$ .

17. Le coefficient de convection  $h$  est en fait un coefficient global prenant en compte, l'effet conducto-convectif mais aussi l'effet de rayonnement. En linéarisant le bilan radiatif pour la barre dans une atmosphère à 20 °C, évaluer la part due au rayonnement dans le phénomène de convection. Conclure.