

Exercices : 38 - Induction

A. Conducteur mobile dans un champ magnétique indépendant du temps

1. Induction et conversion d'énergie

Une tige rectiligne de longueur a , de masse m et de résistance R effectue un mouvement de translation le long de la verticale descendante \mathbf{e}_z en restant parallèle à une direction horizontale et tout en fermant un circuit rectangulaire qui comporte une bobine d'inductance L . La résistance totale du circuit est R quelque soit la position de la tige. L'ensemble du dispositif est plongé dans un champ magnétique $\mathbf{B} = -B\mathbf{e}_y$ uniforme et permanent. La tige est abandonnée à $t = 0$, avec une vitesse nulle. Son glissement s'effectue sans frottements, on notera v sa vitesse. Voir la figure 1.

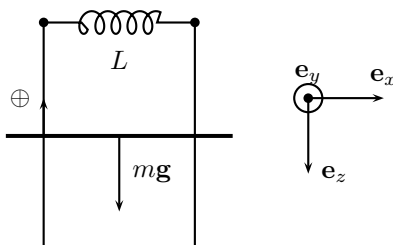


FIG. 1 – Chute d'une barre dans le champ de pesanteur

1. En notant i l'intensité du courant qui circule à l'instant t , écrire une équation différentielle faisant intervenir i et sa dérivée par rapport au temps. Le sens arbitrairement choisi pour l'intensité i est donné sur la figure 1.
2. Établir une équation différentielle liant v et sa dérivée par rapport au temps.
3. En combinant convenablement les deux équations précédentes, faire apparaître une équation en puissance. On écrira le premier membre de cette équation comme la dérivée d'une énergie que l'on identifiera.
4. Écrire une équation différentielle faisant intervenir uniquement i .
5. Dans le cas d'une résistance assez grande, décrire qualitativement l'évolution des fonctions $i(t)$ et $v(t)$. Mettre en évidence un couple de valeurs particulières i_0 et v_0 dont on expliquera la signification physique.
6. Dans l'hypothèse inverse d'une résistance négligeable, calculer explicitement les fonctions $i(t)$, $v(t)$ et $z(t)$. Analyser la situation obtenue d'un point de vue énergétique.

2. Principe du frein électromagnétique

Les véhicules routiers lourds utilisent le frein électromagnétique décrit sur la figure 2 qui en précise le principe général : les forces de LAPLACE exercées sur les courants de FOUCAULT engendrés par la rotation d'un disque métallique en ralentissent la rotation. Sur la partie gauche du schéma, on observe la disposition alternée du courant dans les $2N$ bobines (alimentées par la batterie du camion) donc la répartition alternée du champ magnétique.

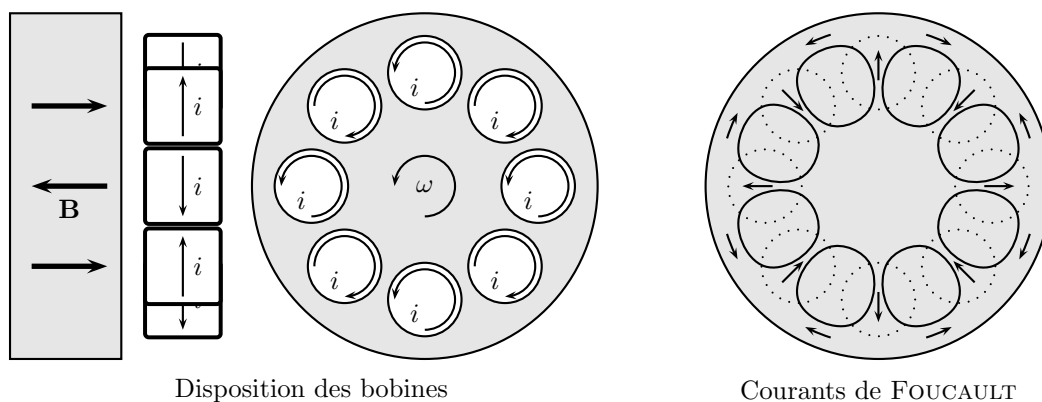


FIG. 2 – Principe du frein électromagnétique

Lorsque le frein est en service, les $2N$ bobines sont parcourues par le courant i . Le disque métallique représenté est solidaire des axes des roues et tourne donc à la vitesse angulaire ω . Chaque disque comporte donc $2N$ régions subissant le champ magnétique alterné $\pm B_0\mathbf{e}_z$, en utilisant une base polaire ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$) pour la description du

disque tournant. On notera R la distance moyenne au centre du disque de chacune de ces bobines ; on supposera que, du fait de la conductivité γ du disque tournant, des courants de FOUCAULT apparaissent dans le disque, et que ces courants sont pratiquement radiaux dans chaque zone située en face d'une bobine.

1. On s'intéresse à une des N régions du disque où le champ est $\mathbf{B} = +B_0\mathbf{e}_z$; déterminer la densité volumique des courants induits.
2. En déduire la force de LAPLACE exercée par unité de surface du disque, en fonction de γ , ω , B_0 , R , et de l'épaisseur e du disque.
3. Calculer la puissance totale dissipée par ces forces de freinage ; on l'exprimera en fonction de γ , ω , R , B_0 , e et de la surface utile S_u du disque, c'est-à-dire la partie de cette surface qui est disposée en face d'une bobine.
Comment retrouver cette expression par une autre méthode ?
4. Montrer que le disque est soumis à un couple de freinage par unité de volume utile de disque tournant donné par $\frac{d\Gamma_{\text{freinage}}}{d\tau} = -\gamma\omega R^2 B_0^2$. Commenter.

3. Principe d'un sismographe à détection électromagnétique

Un sismographe est constitué d'un bâti (A), rigidement lié au sol, auquel on suspend par un système ressort-amortisseur un cylindre de masse élevée m . Ce cylindre est aussi un aimant cylindrique, dont le cylindre intérieur est le pôle nord et le cylindre extérieur le pôle sud (cf. figure 4).

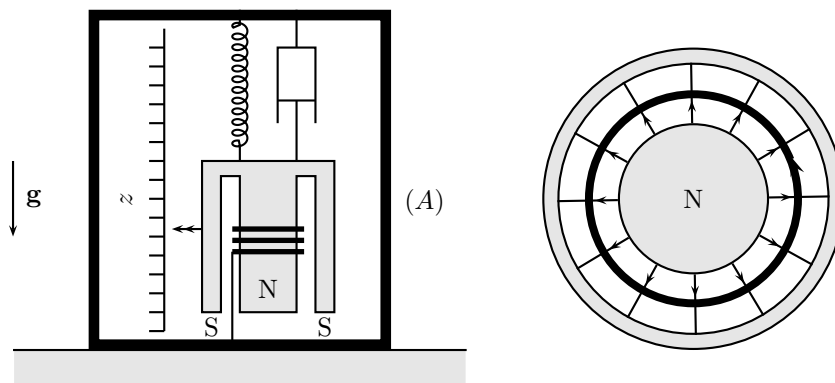


FIG. 3 – Principe d'un sismographe à détection électromagnétique

La même figure montre les lignes de champ (radiales) du champ magnétique, et le circuit de détection, formé de N spires circulaires de même rayon a , liées au bâti, orientées comme l'indique la figure. Le champ magnétique au niveau de la boucle de détection est d'intensité constante B_0 .

On note k la constante de raideur du ressort et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; durant le passage d'une onde sismique, le sol est soumis à l'accélération verticale $\mathbf{a} = \gamma_0 \cos \Omega t \mathbf{e}_z$, l'axe (Oz) étant vertical ascendant. On étudie les vibrations du sismographe, c'est-à-dire les oscillations verticales $z(t)$ de la masse m relativement au bâti, par rapport à sa position d'équilibre en l'absence d'onde sismique.

Pour cela, le circuit de détection est ouvert et on mesure la tension $u(t)$ à ses bornes.

1. Justifier soigneusement l'équation différentielle $\ddot{z} + 2\xi\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = -\gamma_0 \cos \Omega t$.
2. Expliciter la force électro-motrice induite le long du circuit de détection.
3. Déterminer, en régime harmonique, la fonction de transfert complexe $\bar{K} = \bar{u}/\gamma_0$, où u est la tension aux bornes du circuit de détection. Commenter.

B. Conducteur fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

4. Barre en rotation

Un conducteur filiforme de résistance négligeable a la forme (cf. fig. 5) d'un cercle de centre O et de rayon a . Un point A fixe du cercle est relié à un circuit électrique contenant une résistance R et un générateur de force électromotrice E , relié au centre O du cercle.

Pour fermer le circuit, on dispose une barre diamétrale de centre O qui tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de son axe vertical, passant par O et normal au cercle.

Cette barre de résistance négligeable ferme le circuit en deux points M et N diamétralement opposés sur le cercle. L'ensemble du dispositif est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant, vertical (perpendiculaire au cercle de centre O), de norme B .

On note L le coefficient d'auto-induction du système.

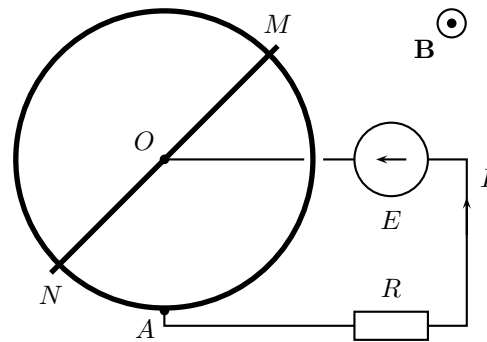


FIG. 4 – Barre tournant sur un cercle

1. Déterminer la force électromotrice induite sur OM et ON .
2. En déduire l'expression du courant $I(t)$; on supposera que $I(t=0) = 0$.

Réponses : $\mathbf{E}_m = r\omega B\mathbf{e}_r$, $e_{ON} = e_{OM} = \frac{\omega Ba^2}{2}$, deux générateurs idéaux de tension en parallèle de même fem ; $RI + L\frac{dI}{dt} = \frac{\omega Ba^2}{2} + E$, $I(t) = [\frac{E}{R} + \frac{\omega Ba^2}{2R}](1 - \exp -\frac{Rt}{L})$.

5. Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique est constituée d'un tore de section carrée de côté $a = 1$ cm, d'axe Oz et de rayon moyen $3/2a$, sur lequel on a bobiné régulièrement un grand nombre (10^4) de spires carrées de côté a en série. Ce circuit de résistance $R = 0,2 \Omega$, est fermé sur un ampèremètre de résistance $r = 0,3 \Omega$. D'autre part, un fil infini, confondu avec l'axe Oz , est parcouru par un courant d'intensité $I(t) = I_0 \cos \omega t$, de fréquence $f = 50$ Hz. Soit $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$ la valeur du courant dans la pince ampèremétrique en régime sinusoïdal forcé. On songera à utiliser la notation complexe.

1. Soit \mathbf{B} le champ magnétique total créé par la pince et le fil. Justifier que $\mathbf{B} = B_0(r)\mathbf{e}_\theta$ et déterminer $B_0(r)$ en un point P situé dans la section d'une spire carrée du tore.
2. En déduire le flux magnétique total Φ à travers les N spires. Donner les expressions du coefficient d'inductance propre du tore L et le coefficient d'inductance mutuelle M entre le tore et le fil.
3. Calculer le rapport i_m/I_0 dans les conditions de l'étude. Intérêt et utilisation d'un tel dispositif?

6. Effet Kelvin

Un cylindre de conductivité γ et de rayon R est traversé par un courant sinusoïdal d'intensité $i_0 \cos(\omega t)$. Un point du cylindre est caractérisé par ses coordonnées cylindriques r, θ, z . En notations complexes, la densité volumique de courant dans le cylindre s'écrit $\mathbf{j} = \bar{j}_0(r) \exp(i\omega t) \mathbf{e}_z$, et le champ magnétique $\mathbf{B} = \bar{B}_0(r) \exp(i\omega t) \mathbf{e}_\theta$. On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents.

1. Déterminer les équations différentielles vérifiées par $\bar{B}_0(r)$ et $\bar{j}_0(r)$.
2. On pose $R - r = \alpha u$ avec $\alpha^2 = -\frac{1}{\mu_0 \gamma \omega}$. Écrire l'expression de $\bar{B}_0(r)$ sous forme d'une série entière en u .
3. À quelle condition (portant sur a) peut-on considérer que $\bar{j}_0(r)$ est uniforme?

C. Cas général

7. Champ magnétique tournant

Un système de bobines de Helmholtz d'axe horizontal Ox , parcourues par un courant sinusoïdal de pulsation ω , assure autour du point O un champ magnétique quasiment uniforme : $\mathbf{B}_1 = B_0 \cos \omega t \mathbf{e}_x$ tandis qu'un autre système de bobines, disposée à 90° du précédent et parcouru par un courant de mêmes intensité et pulsation mais déphasé de $\pi/2$, assure le champ magnétique également quasiment uniforme : $\mathbf{B}_2 = B_0 \sin \omega t \mathbf{e}_y$.

1. Faire un schéma du dispositif des bobines d'Helmholtz, en précisant les rôles respectifs.
2. Caractériser le champ magnétique total au voisinage du point O .
3. Au voisinage de O , on dispose une petite bobine plate circulaire, comportant N spires d'aire s , qui tourne autour d'un de ses diamètres vertical disposé selon Oz avec la vitesse angulaire Ω . Déterminer la fem induite dans la spire.

D. Coefficients d'inductance

8. Couplage mutuel et adaptation d'impédance

Un générateur de tension d'impédance $Z_g = R_g + jX_g$ alimente un circuit d'utilisation modélisé par une impédance complexe $Z_u = R_u + jX_u$.

1. Quelles doivent être les relations, entre R_g et R_u d'une part et X_g et X_u d'autre part, pour que la puissance absorbée par soit maximale ?

a) $R_g = R_u$ b) $X_g = X_u$ c) $X_g = -X_u$ d) $R_g = X_u$

On considère maintenant le circuit suivant constitué d'une générateur de tension sinusoïdale de fem $e(t) = E_0 \cos \omega t$ de 50 V efficaces et de résistance interne $R_g = 5 \Omega$. Il alimente un circuit série composé d'une résistance R_u , d'un condensateur de capacité C et de deux bobines parfaites de coefficient d'autoinductance L . Ces deux bobines sont connectés de telle sorte qu'il y ait influence électromagnétique entre elles. Le coefficient d'induction mutuel algébrique est M . On appelle k le coefficient de couplage défini ainsi : $k = |M|/L$. La pulsation de la tension est telle que les impédances du condensateur et de chacune des bobines non couplée sont respectivement de 5Ω et 12Ω . Voir la figure 6.

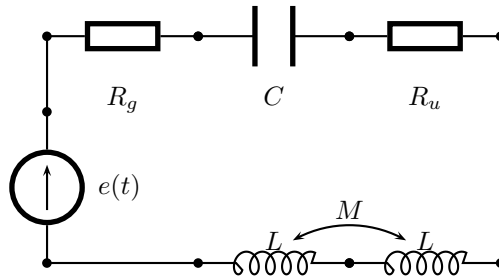


FIG. 5 – Adaptation d'impédance

On désire que la puissance consommée dans R_u soit maximale.

2. Quelle doit être la valeur de R_u ?

a) $R_u = 7 \Omega$ b) $R_u = 5 \Omega$ c) $R_u = 3 \Omega$ d) $R_u = 12 \Omega$

3. Calculer cette puissance maximale.

a) $P_{umax} = 125 \text{ W}$ b) $P_{umax} = 25 \text{ W}$ c) $P_{umax} = 50 \text{ W}$ d) $P_{umax} = 75 \text{ W}$

4. Quelle doit être la valeur du coefficient de couplage k ?

a) $k = 0,512$ b) $k = 0,317$ c) $k = 0,415$ d) $k = 0,792$

5. La résistance du résistor vaut maintenant $R_u = 10 \Omega$. On fait varier k et éventuellement le sens du couplage des bobines. Déterminer la gamme de puissance qui peut alors être fournie au résistor.

a) $53 \text{ W} \leq P_u \leq 78 \text{ W}$ b) $47 \text{ W} \leq P_u \leq 92 \text{ W}$ c) $28 \text{ W} \leq P_u \leq 102 \text{ W}$ d) $12 \text{ W} \leq P_u \leq 100 \text{ W}$

Réponses : a) et c), b), a), $1 \pm k = \frac{5}{24}$ d), $P_u = \frac{R_u E_{0eff}^2}{(R_g + R_u)^2 + (2L(1 \pm k)\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ d).