Exercices : 37 - Aspect énergétique de la magnétostatique

A. Calculs de coefficients d'induction

1. Influence mutuelle de deux solénoïdes

On désigne par S_1 et S_2 deux solénoïdes circulaires sans résistance appréciable, caractérisés respectivement par leurs volumes intérieurs $V_1 = \pi R_1^2 l_1$ et $V_2 = \pi R_2^2 l_2$. Leur nombre de spires par mètre est n_1 et n_2. Ils sont parcourus respectivement par des courants permanents ou lentement variables d'intensité i_1 et i_2. On néglige les effets de bord et on admet que les champs magnétiques créés sont uniformes à l'intérieur des solénoïdes et nuls à l'extérieur. Les axes des solénoïdes sont parallèles mais non confondus. On considère un état dans lequel, compte tenu d'une réalisation mécanique convenable, les solénoïdes peuvent se chevaucher partiellement. On désigne par V_3 leur volume commun.

1. Exprimer l'énergie magnétique U de l'ensemble du système en fonction des champs B_i et des volumes V_i. En déduire les expressions des coefficients d'inductance propres et mutuelle.
2. Vérifier les résultats précédents en revenant aux définitions de L et M.

2. Inductance propre d'un câble coaxial

On étudie un câble coaxial de grande longueur, formé de deux armatures cylindriques de rayons a et $b > a$. Le câble transporte le courant I dans un sens sur l'armature intérieure et dans l'autre sens sur l'armature extérieure.

1. Déterminer le champ magnétique créé en tout point de l'espace.
2. Quelle est l'énergie magnétique accumulée par unité de longueur de câble ?
3. Quelle est l'inductance propre du câble par unité de longueur L_u ?

3. Influence mutuelle de deux tores

Un tore est engendré par rotation d'un carré de côté b autour de l'axe Δ situé dans le plan du carré, parallèlement à l'un de ses côtés et à une distance $a > b$ de son centre pour le côté du carré le plus proche de l'axe.

1. Un circuit comprenant N_1 spires est enroulé régulièrement sur le tore. Calculer le coefficient d'autoinductance de ce circuit.
2. Un second circuit comprenant N_2 spires est superposé au précédent. Calculer l'inductance mutuelle entre les deux circuits.

4. Deux lignes bifilaires

Quatre fils rectilignes sont parallèles. Ils sont cylindriques, de même rayon a. On admet que le courant qu'ils transportent est réparti uniformément à la surface des fils. Les deux fils de droite font partie d'un circuit parcouru par le courant j ; les deux fils de gauche font également partie d'un circuit parcouru par le courant i. Les quatre fils coupent un plan qui leur est perpendiculaire selon un carré de côté d (cf. fig. 1).

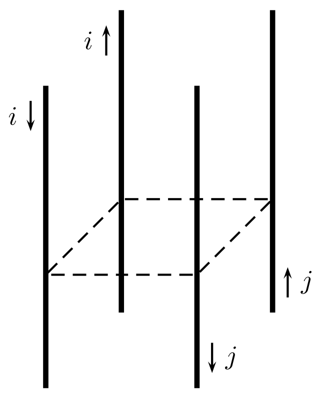

FIG. 1 – Deux lignes bifilaires

1. Déterminer l'inductance mutuelle M_u par unité de longueur des deux circuits.
2. Déterminer l'inductance propre L_u ar unité de longueur de chacun des deux circuits.

Réponses : Potentiel vecteur créé par deux fils : $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mathbf{e}_z$, en un point du plan des deux autres fils d'abscisse x : $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \ln \frac{d^2+(x+\frac{d}{2})^2}{d^2+(x-\frac{d}{2})^2} \mathbf{e}_z$, flux sur un rectangle de hauteur h : $\Phi_{ij} = \oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}l = A(x=\frac{d}{2})h - A(x =$

$-\frac{d}{2})h = \frac{\mu_0 ih}{2\pi}\ln 2$, $M_u = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln 2$; en un point d'abscisse x entre les deux fils $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}(\frac{1}{\frac{d}{2}+x} + \frac{1}{\frac{d}{2}-x}$, sur une hauteur h : $\Phi ii = \int B\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{\mu_0 i}{\pi}h\ln\frac{d-a}{a}$, $L_u = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$.

5. Équations locales et analogie

Deux solénoïdes de grande longueur et de même axe comportent respectivement n et n' spires par mètre. Ils sont de rayons a et a' avec $a < a'$. On les oriente de la même façon. On appelle h leur longueur commune.

1. On rappelle que le champ magnétique créé par un conducteur cylindrique de rayon a, d'axe Oz, infini, parcouru par le courant I uniformément réparti en volume, est :

$$\mathbf{B}_{r\leq a} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{r\geq a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{e}_\theta$$

   dans le système de coordonnées cylindriques d'axe Oz. En déduire par une méthode d'analogie le potentiel vecteur créé en tout point par un solénoïde infini.
2. En négligeant tout effet de bord, déterminer l'inductance propre d'un de ces solénoïdes. Calculer numériquement L si $a = 2$ cm pour un solénoïde comportant 2000 spires bobinées sur une longueur totale de 20 cm.
3. En négligeant encore tout effet de bord, déterminer l'inductance mutuelle de ces deux solénoïdes.

Réponses : $\mathbf{A}_{r\leq a} = \frac{\mu_0 n I r}{2}\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{A}_{r\geq a} = \frac{\mu_0 I a^2}{2r}\mathbf{e}_\theta$, $L = \mu_0\frac{N^2\pi a^2}{l} = 3,16\times 10^{-2}$ H, $M = \mu_0 n n'\pi a^2 h$.

B. Calculs de forces, de couples

6. Dipôle magnétique dans un champ extérieur

Un fil rectiligne infini, parcouru par un courant I, est disposé dans le vide dans le même plan qu'un rectangle de fil parcouru par un courant i. Les côtés du rectangle parallèles au fil sont de longueur a et placés aux distances D et $D + b$ du fil ; les deux autres côtés du rectangle sont de longueur b. On supposera $D \gg b$. Voir la figure 2.

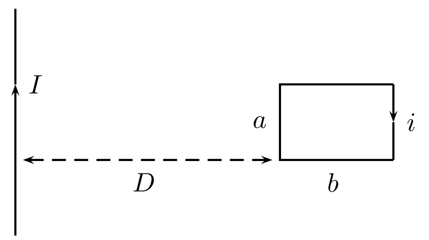

FIG. 2 – Cadre plongé dans le champ d'un fil infini

1. Déterminer par un calcul direct la force de Laplace exercée par le fil sur la spire rectangulaire.
2. En considérant la spire rectangulaire comme un dipôle, déterminer le flux Φ envoyé dans la spire par le fil infini. En déduire l'énergie de celle-ci. Retrouver l'expression de la force de Laplace calculée avant.

7. Électrodynamomètre ou balance électromagnétique

L'électrodynamomètre de PELLAT est constitué d'une petite bobine soumise à l'action du champ magnétique produit par le solénoïde S_1. Grâce au fléau d'une balance, cette action est comparée à celle d'une masse m. On note n_1 le nombre de spires par mètre de S_1 et N_2 le nombre de spires total de la bobine de rayon b. Voir la figure 3.

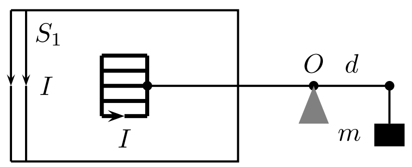

FIG. 3 – Balance électromagnétique

1. Quelle est l'énergie magnétique mutuelle du système en fonction de l'angle θ que fait la normale au plan de la bobine avec la perpendiculaire à la direction du champ du solénoïde ?
2. En déduire le couple qui s'exerce sur la bobine.
3. Quelle est la relation qui lie I et m lorsque $\theta = 0$?

Réponses : $E = -\mu_0 n_1 N_2\pi b^2 I^2\sin\theta$; $\Gamma = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\theta} = \mu_0 n_1 N_2\pi b^2 I^2\cos\theta$; $\mu_0 n_1 N_2\pi b^2 I^2 = mgd$.