

Exercices : 34 - Champ magnétique

A. Modélisation volumique des courants

1. Potentiel vecteur d'un champ uniforme à géométrie cylindrique

On considère une région de l'espace où le champ magnétique est quasiment uniforme, de norme B_0 , dirigé selon l'axe Oz . Dans cet exercice, on pourra utiliser les expressions des opérateurs vectoriels dans un système de coordonnées adapté.

1. Quelle doit être la disposition d'un système de spires circulaires pour créer un tel champ ?
2. Déterminer un potentiel vecteur convenable, de même géométrie que les courants.
3. Vérifier la jauge de Coulomb.

2. Courant volumique dans un fil rectiligne

Un fil conducteur cylindrique de rayon a transporte le courant I réparti uniformément en volume. Le fil est assez long pour négliger tout effet de bord. Après avoir rappelé les conséquences de la symétrie des courants sur la forme du champ magnétique, déterminer ce dernier dans tout l'espace par résolution d'une des équations de Maxwell.

3. Couches planes de courant

On considère deux couches planes, parallèles et indéfinies selon les directions y et z . Elles sont l'une et l'autre parcourues par des courants volumiques permanents, uniformes et opposés $j\mathbf{e}_y$ et $-j\mathbf{e}_y$. Voir la figure 1 qui précise les notations.

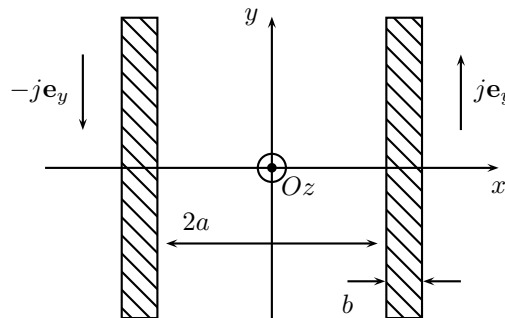


FIG. 1 – Couches planes de courant

On donne $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ pour $|x| \geq (a + b)$. Calculer le champ magnétique pour $|x| \leq (a + b)$.

B. Modélisation surfacique des courants

4. Nappe cylindrique de courant

On considère une nappe de courants surfaciques sur un cylindre droit infini d'axe Oz et de rayon a . La densité surfacique de courant est : $j_S \mathbf{e}_\theta$ où j_S est une constante.

1. Montrer que le système proposé est l'analogie d'un solénoïde infini. En déduire l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace.
2. Calculer le potentiel vecteur en tout point de l'espace.

Réponses : $\mathbf{B}_{r < a} = \mu_0 j_S \mathbf{e}_z$, $\mathbf{B}_{r > a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_{r \leq a} = \frac{\mu_0 j_S r}{2} \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{A}_{r \geq a} = \frac{\mu_0 j_S a^2}{2r} \mathbf{e}_\theta$.

5. Sphère chargée en surface

Une sphère isolante de centre O et de rayon R porte (cf. figure 2) la densité surfacique de charge uniforme σ . Cette sphère tourne autour d'un de ses diamètres (Oz) à la vitesse angulaire ω constante.

1. Déterminer, par un calcul direct, le potentiel vecteur créé au centre de la sphère.
2. Déterminer, par un calcul direct, le champ magnétique créé au centre de la sphère.

C. Modélisation filiforme des courants

6. Bobines de Helmholtz

On considère une distribution de courants cylindriques autour de l'axe Oz qui crée un champ magnétique sur l'axe Oz colinéaire à cet axe.

1. Rappeler sans démonstration l'expression du champ créé par une spire de rayon a parcourue par une intensité I à la distance z du centre de cette spire sur l'axe de la spire.

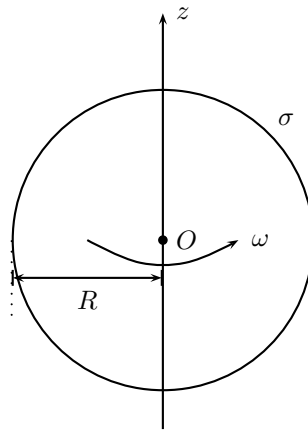


FIG. 2 – Sphère chargée en rotation

- On se place maintenant (tout en étant toujours à la cote z) à une distance r relativement faible de l'axe. En écrivant la conservation du flux magnétique, montrer que le champ possède une composante radiale donnée par :

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Ce résultat est valable pour toute distribution qui possède les mêmes symétries.

On considère le système particulier suivant : deux bobines circulaires plates de même rayon a , de même axe Oz , distantes de d , comportent le même nombre de spires N et sont parcourues dans le même sens par le même courant I . On appelle O le centre de symétrie du système des deux bobines.

- Montrer que la composante radiale du champ magnétique est nulle au voisinage de O au premier ordre en r .
- À quelle condition la composante axiale du champ magnétique sera-t-elle aussi constante au second ordre près en z autour de O ? Quel est l'intérêt du dispositif appelé « bobines de Helmholtz » ?

7. Bobine torique

Une bobine torique est constituée d'un enroulement continu de N spires circulaires de rayon a , parcourues par le même courant I , régulièrement entourée autour d'un tore, de rayon moyen R , de section circulaire de rayon $a < R$.

- Montrer que le champ magnétique est nul hors du tore. Déterminer son expression à l'intérieur de celui-ci, en fonction de la distance r à l'axe.
- Application numérique : $N = 1000$; $I = 1$ A ; $R = 10$ cm et $a = 3$ cm. Quelles sont les valeurs extrêmes du champ magnétique? Quel courant devrait-on faire passer dans un fil rectiligne infini pour obtenir le même champ à la même distance ?
- Expliciter la densité surfacique de courants équivalente à ce bobinage.

D. Équations locales de la magnétostatique

8. Sphère chargée en surface

Une sphère isolante de centre O et de rayon R porte (cf. figure 3) la densité surfacique de charge uniforme σ . Cette sphère tourne autour d'un de ses diamètres (Oz) à la vitesse angulaire ω constante.

- Expliciter la densité surfacique de courants correspondant à ces mouvements de la sphère chargée.
- On cherche une solution du problème magnétostatique sous la forme $\mathbf{A} = f(r) \sin \theta g(\varphi) \mathbf{e}_\varphi$, en coordonnées cylindriques. À quelle condition ce potentiel vérifie-t-il la jauge de Coulomb ?
- À quelle condition ce potentiel fournit-il une solution du problème magnétostatique posé? En déduire, par étude des conditions aux limites, la forme du champ \mathbf{B} créé en tout point, intérieur ou extérieur à la sphère chargée.
- Déterminer par un calcul direct le champ magnétique en O .
- En déduire les expressions du potentiel et du champ magnétique en tout point de l'espace.

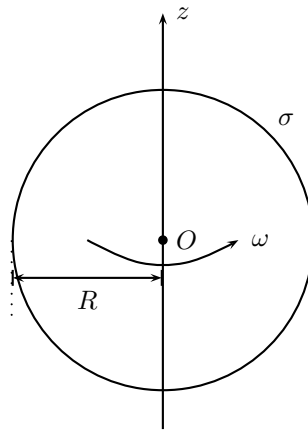


FIG. 3 – Sphère chargée en rotation

Réponses : $\mathbf{j}_s = \sigma\omega R \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$, $\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = 0$ d'où $g(\varphi) = \text{Cte}$, $B_r = \frac{2\cos\theta}{r} f(r)$, $B_\theta = -\frac{\sin\theta}{r} \frac{d}{dr}(rf(r))$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$ vérifiée, $\text{rot rot } \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ou $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}$ impose $\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial \theta}$, $\frac{d^2(rf)}{dr^2} = \frac{2f}{r}$ ou bien $r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - 2f = 0$, on recherche les solutions sous la forme $f(r) = \beta r^\alpha$ d'où $\alpha = -2$ ou $\alpha = 1$, $\mathbf{A} \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$ et ne peut pas diverger en $r = 0$ donc $\alpha = 1$ correspond à l'intérieur et $\alpha = -2$ à l'extérieur, $\mathbf{B}(O) = \frac{2\mu_0\sigma R\omega}{3} \mathbf{e}_z$ d'où $\beta^{int} = \frac{\mu_0\sigma R\omega}{3}$, $B_r^{int} = \frac{2\mu_0\sigma R\omega}{3} \cos\theta$ et $B_\theta^{int} = -\frac{2\mu_0\sigma R\omega}{3} \sin\theta$ donc $\mathbf{B}^{int} = \frac{2\mu_0\sigma R\omega}{3} \mathbf{e}_z$ uniforme, \mathbf{A} continu en $r = R$: $\beta^{ext} = \frac{\mu_0\sigma R^4\omega}{3}$, $\mathbf{A}^{int} = \frac{\mu_0\sigma R\omega}{3} r \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{A}^{ext} = \frac{\mu_0\sigma R^4\omega}{3r^2} \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{B}^{ext} = \frac{\mu_0\sigma R^4\omega}{3r^3} (2\cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta)$, forme dipolaire.

E. Calculs directs de champs

9. Électro-aimant

Les pièces polaires d'un électro-aimant sont constituées (cf. figure 4) de deux troncs de cône de même sommet O , de demi-angle au sommet α . On enroule un fil de diamètre $2a$ sur chacun de ces troncs de cône. Le fil est enroulé de sorte que les spires soient jointives; elles sont réparties entre les distances minimale et maximale au sommet d et $D > d$. Toutes les spires sont parcourues par le même courant i .

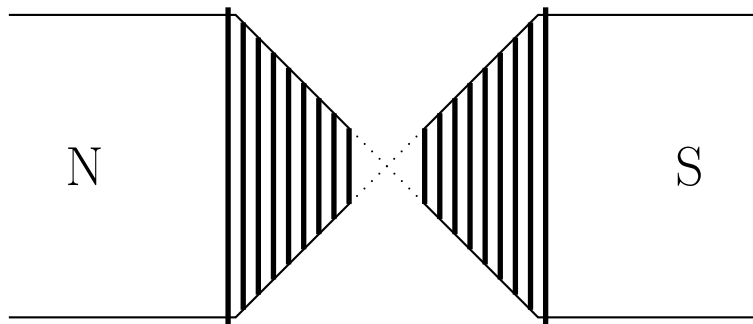


FIG. 4 – Pièces polaires d'un électro-aimant

1. Quel doit être le sens respectif du courant dans les deux enroulements pour que le champ magnétique soit maximal en O et respecte les polarités du schéma ?
2. Calculer le champ magnétique créé en O par cet enroulement.
3. Calculer la résistance de cet enroulement, en fonction de la conductivité γ du fil.

Réponses : i de même sens dans chaque enroulement et vers le haut, $B(O) = \frac{\mu_0 i \sin^4 \alpha}{2a \cos^2 \alpha} \ln \frac{D}{d}$, $L = \frac{\pi \sin \alpha}{a \cos^2 \alpha} (D^2 - d^2)$, $R = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{D^2 - d^2}{a^3}$.