# Exercices : 32 - Conducteurs

## A. Images électriques

### 1. Interaction charge - plan conducteur

Un plan métallique de grandes dimensions (que l'on supposera donc infini) est maintenu au potentiel nul, égal à celui de l'infini. On dispose à la distance $a$ de ce plan une charge ponctuelle $q$, sur l'axe $Oz$, du côté positif de cet axe.

1. Montrer que, entre le plan métallique et la charge ponctuelle $q$, le problème électrostatique est totalement équivalent à celui de deux charges $q$ et $-q$ disposées dans le vide en $a$ et $-a$ sur l'axe $Oz$.
2. Calculer le champ électrique créé par les deux charges ponctuelles au niveau du plan $z = 0$.
3. En déduire la charge surfacique portée par le plan conducteur. Déterminer alors la charge totale $Q$ portée par le plan conducteur.

### 2. Interaction charge - sphère

On considère un système de deux charges ponctuelles $q > 0$ et $q'$, distantes de $a$. On choisira l'origine des potentiels à l'infini. On prendra $q' = \alpha q$ avec $0 < \alpha < 1$.

1. A quelle condition ce système de charges admet-il une équipotentielle, de potentiel nul, sphérique ? Déterminer la position et le rayon de la sphère.
2. Une sphère métallique de rayon $R$ maintenue au potentiel zéro est placée à côté d'une charge ponctuelle $Q > 0$. On appelle $d$ la distance entre le centre de la sphère et $Q$ ($d > R$). Déterminer :
   - la charge totale portée par la sphère
   - le potentiel dans tout l'espace
   - la force exercée par la charge sur la sphère.

## B. Conséquences de l'équilibre électrostatique

### 3. Effet de bord ou de pointe

On étudie un disque métallique de centre $O$ dont l'épaisseur est très faible devant le rayon $a$. On peut montrer que dans une situation d'équilibre électrostatique, la répartition des charges sur les faces du disque peut être décrite comme la projection sur un plan diamétral d'une distribution répartie uniformément avec la densité surfacique $\sigma_0$ sur une sphère de rayon $a$.

1. Expliciter en fonction de $r$, $a$ et $\sigma_0$ la densité $\sigma$ en un point $M$ de l'une des faces du disque situé à la distance $r$ de $O$.
2. Commenter la variation de $\sigma(r)$ au voisinage des bords du disque.
3. Calculer le potentiel $V$ (pris nul à l'infini) du disque. En déduire l'expression de sa capacité propre.

Réponses : $2\sigma_0 a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \sigma(r) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi$, $\sigma(r) = 2\sigma_0 / \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$ ; effet de pointe ; $V = \frac{\sigma_0 a}{\varepsilon_0} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi \sigma_0 a}{2\varepsilon_0}$, $C = \frac{\sigma_0 4\pi a^2}{V} = 8\pi\varepsilon_0 a$.

### 4. Pression électrostatique, lévitation

Une sphère métallique de rayon $a$ est portée au potentiel $V_0$ relativement à l'infini. Sur le sommet de cette sphère est disposé un petit disque conducteur de rayon $r \ll a$. On rappelle qu'un élément de surface $\mathrm{d}S$ de conducteur portant la charge surfacique $\sigma$ subit une force de répulsion électrostatique exercée par les autres charges portées par le conducteur donnée par $\mathrm{d}f = p_{\text{élec}} \mathrm{d}S$ où $p_{\text{élec}}$ est la pression électrostatique : $p_{\text{élec}} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$.

1. Déterminer les charges $Q$ de la grande sphère et $q$ du petit disque.
2. Quelle est la condition portant sur $V_0$ pour que le petit disque se soulève ? on notera $m$ sa masse, $g$ l'accélération de la pesanteur et on fera apparaître une valeur critique $V_c$ de $V_0$.
3. Ce disque se soulève en emportant la charge $q$ et se stabilise à une certaine hauteur $h$ au dessus de la sphère. La charge $q$ est alors répartie de façon uniforme sur chacune des deux faces du disque (mais les deux densités surfaciques ne sont pas égales).

   Le disque est assimilé à un cylindre de faible épaisseur.

   Écrire la condition d'équilibre électrostatique au centre de ce cylindre.

   Relier les densités surfaciques de charge $\sigma_+$ et $\sigma_-$ portées par les faces supérieure et inférieure du cylindre à celle $\sigma_0$ portée par la sphère (de potentiel $V_0$), à $h$ et $a$.

   Déterminer $\sigma_+$ et $\sigma_-$ ; déterminer $h$ à l'équilibre.

   À partir de la position d'équilibre ci-dessus ($V_0 = V_c$), on diminue $V_0$. Pour quelle valeur de $V_0$ le disque se redéposera-t-il sur la sphère ?

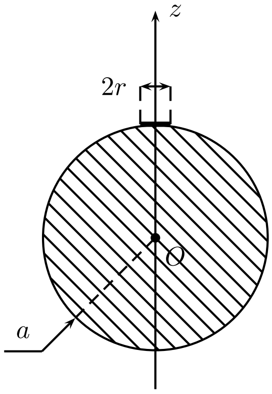


FIG. 1 – Sphère sur laquelle est posée un disque

## C. Systèmes de conducteurs en équilibre électrostatique

### 5. Cylindres décentrés

On considère un système deux conducteurs parfaits cylindriques de rayon $R_1$ et $R_2 > R_1$ d'axe $Oz$ tangent en $O$ origine du repère $Oxy$. La longueur des cylindres est suffisamment grande devant leur rayon pour qu'on les considère comme infini. On supposera que malgré la tangence en $O$ les deux conducteurs ne sont pas en contact électrique. Le conducteur intérieur est porté au potentiel $U > 0$, le conducteur extérieur est à la masse. L'espace entre les deux conducteurs est vide. Dans un système de coordonnées polaires d'axe $Oz$ où l'angle $\theta$ représente l'angle entre l'axe $Ox$ et la direction du point $M$ d'étude, on pourra observer que l'équation des cercles est respectivement $r_{c1} = 2R_1 \cos\theta$ et $r_{c2} = 2R_2 \cos\theta$. Voir la figure 2.

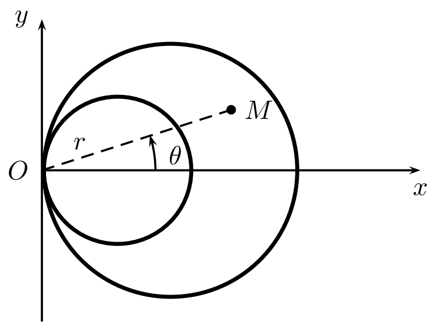


FIG. 2 – Cylindres décentrés

1. Justifier à l'aide de l'équation de POISSON que le potentiel $V(M)$ peut se mettre sous la forme :
$$V(M) = a\frac{\cos\theta}{r} + b$$
Déterminer les constantes $a$ et $b$ en fonction de $U$, $R_1$ et $R_2$. Faire un schéma des équipotentielles dans le plan $Oxy$.
2. Déterminer l'expression du champ électrostatique au point $\mathbf{E}(M)$. Rechercher les équations des lignes de champ et donner l'allure de celles-ci.
3. Calculer le rapport des densités superficielles de charge évaluées sur chaque conducteur au niveau de l'axe $Ox$ en fonction de $R_1$ et $R_2$.
4. Déterminer la valeur de la force électrostatique qui s'exerce par unité de longueur sur le conducteur de rayon $R_2$ pour la portion définie par $\theta \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$. On donne l'expression de la pression électrostatique $p_{elc} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$. On donne : $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^4\theta} = \frac{8}{3}$.
5. Poser le calcul de l'intégrale permettant d'évaluer les charges portées par chaque conducteur par unité de longueur pour $\theta \in [-\frac{\pi}{2} + \varepsilon; \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$. Déterminer cette intégrale. Que se passe-t-il si $\varepsilon \to 0$ ? Commenter.

Réponses : $a = \frac{2UR_1R_2}{R_2 - R_1}$ et $b = -U\frac{R_1}{R_2 - R_1}$, $\mathbf{E} = \frac{a}{r^2}(\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta)$, $\mathbf{E}$ fait un angle $2\theta$ avec l'axe $Ox$, lignes de $\mathbf{E}$ selon $r = K|\sin\theta|$, $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{R_2^2}{R_1^2}$, $\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}z} = \frac{a^2\varepsilon_0}{16R_2^3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos 2\theta}{\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{a^2\varepsilon_0}{12R_2^3}$, $\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}z} = \frac{a\varepsilon_0}{R_1}\tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$, si $\varepsilon \to 0$ alors la charge tend vers l'infini logique à cause de la tangence en $O$.