Exercices : 31 - Champ électrostatique

A. Calculs directs de champ et de potentiel

1. Théorème de superposition

Une sphère de rayon b porte une charge positive Q répartie uniformément sur sa surface.

1. Calculer le potentiel créé à l'intérieur par la charge Q.

$$\text{a) } V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{b} \qquad \text{b) } V = 0 \qquad \text{c) } V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{b} \qquad \text{d) } V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2b}$$

Deux sphères identiques à la précédente sont disposées symétriquement sur l'axe Oy par rapport à O aux points A et B distants de $2a$ (avec $a > b$). Une troisième charge $-2Q$ considérée comme ponctuelle se trouve en O.

2. Calculer le champ électrique créé par les trois charges en un point P de l'axe Ox d'abscisse x.

$$\text{a) } \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(2a^2+x^2)^{3/2}}\mathbf{e}_x \qquad \text{b) } \mathbf{E} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2}]\mathbf{e}_x$$
$$\text{c) } \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{x^2}]\mathbf{e}_x \qquad \text{d) } \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2}]\mathbf{e}_x$$

Réponses : c) et b).

2. Sphère chargée

Une sphère de centre O et de rayon a porte la densité surfacique de charges uniforme σ sur la fraction de sa surface comprise entre les cotes z_1 et z_2, avec $-a \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant a$ (cf. figure 1).

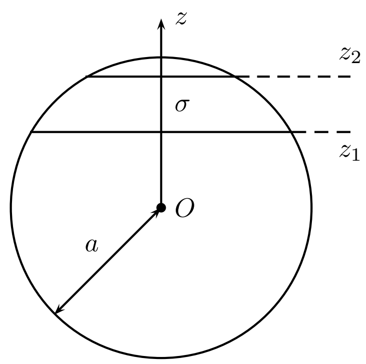

FIG. 1 – Sphère partiellement chargée

1. Déterminer le champ électrique créé au centre de la sphère.
   Traiter et commenter le cas où la sphère est complètement chargée.
2. Déterminer par un calcul direct et sous forme d'une intégrale le champ électrique créé en un point M situé sur l'axe (Oz) de la sphère.
   Traiter et commenter le cas où la sphère est complètement chargée.

B. Théorème de Gauss et équations locales

3. Modélisation de la jonction PN d'une diode ou d'un transistor

Lorsqu'un semi-conducteur présente, dans une région très localisée de l'espace, une variation très brutale de la concentration en dopant, voire un changement de la nature du dopant, on dit qu'on a une jonction. Au voisinage de la jonction, dans une région dite « zone de charge », le cristal acquiert une distribution de charge électrique non nulle que l'on se propose d'étudier. Les propriétés qui en résultent sont à la base de la caractéristique de diodes, des transistors et de tous les circuits intégrés (ampli op en particulier).
On considère un plan infini d'équation $z = 0$, portant une densité surfacique de charge σ constante. Ce plan est plongé dans un milieu quasi-isolant dans lequel la permittivité électrique est $\epsilon_r\varepsilon_0$.

1. Déterminer le champ électrique créé en tout point de l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

   On se place dans le germanium, de permittivité relative ϵ_r et on suppose que la densité volumique de charge ρ invariante en x et en y autour d'une jonction située dans le plan $z = 0$ a l'allure de la figure 2 :
2. Sachant que la distribution de charge est globalement neutre, établir la relation vérifiée par L_1, L_2, ρ_1 et ρ_2.

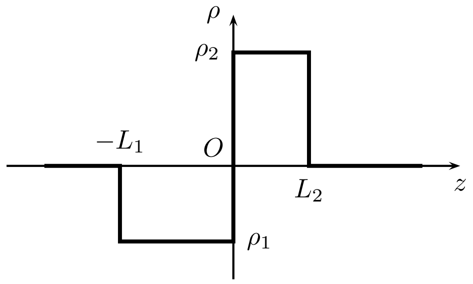

FIG. 2 – Modélisation volumique de la jonction **PN**

3. Déterminer le champ électrique en tout point M de l'espace. On utilisera l'équation de Maxwell relative au champ électrique en utilisant le fait que le champ électrique est nul pour un point M situé à l'infini.
4. En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$. On choisira l'origine des potentiels en $z = 0$.
5. Représenter $V(z)$.
6. Donner l'expression de la différence de potentiel V_0 entre deux points situés de part et d'autre de la zone de charge.
7. La région $(z > 0)$ a été dopée avec de l'antimoine à raison de $N_2 = 1,6 \times 10^{21}$ atomes Sb par m^3, tandis que la région $(z < 0)$ a été dopée avec du bore, avec un nombre d'atomes $N_1 \gg N_2$. On admet que dans la zone de charge, chaque atome Sb est ionisé en Sb^+. Les électrons ainsi libérés traversent spontanément le plan $z = 0$ et chaque atome de bore situé dans la zone de charge se transforme en un anion B^-. En déduire ρ_1 et ρ_2 en fonction de N_1 et N_2.
8. Le système ainsi constitué est une diode à jonction dont la tension de seuil est voisine de V_0. En déduire une expression approchée de la largeur δ de la zone de charge.
9. Application numérique : calculer δ ; on donne : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1} ; $\epsilon_r = 16$; $V_0 = 0,3$ V et $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.

4. Potentiel de Yukawa

Un plasma en équilibre thermique à la température T est formé d'électrons de charge $-e$ et d'ions positifs de charge $+e$, qui se répartissent dans l'espace avec la densité particulaire (nombre de particules par unité de volume) donnée par la loi de Maxwell-Boltzmann, $n_+ = n_0 \exp\left(-\dfrac{e}{k_B T} V(r)\right)$, $n_- = n'_0 \exp\left(+\dfrac{e}{k_B T} V(r)\right)$, où $V(r)$ désigne le potentiel électrostatique qui règne en un point M situé à la distance r d'une charge positive ponctuelle Q introduite au point origine O du plasma.

1. Justifier ces expressions.
   Le plasma étant globalement neutre à grande distance de O, relier n_0 et n'_0.
2. Déterminer la densité volumique de charges $\rho(r)$ en fonction de $V(r)$. Simplifier cette expression dans le cas où la température du plasma est assez élevée.
3. Établir une équation locale vérifiée par $V(r)$.
4. Résoudre cette équation en déterminant $V(r)$. On pourra poser $V(r) = \dfrac{f(r)}{r}$ et établir une équation différentielle du second ordre vérifiée par $f(r)$. Commenter.

5. Champ de gravitation dans une grotte

Une planète est assimilée à une boule de centre O, de rayon R, de masse M uniformément répartie. Elle est creusée d'une grotte sphérique, de centre O', de rayon R', vide.

1. Déterminer le champ de gravitation en un point de la grotte.
2. Expliciter le potentiel de gravitation ϕ, tel que $\mathbf{G} = -\mathbf{grad}\,\phi$, à l'extérieur de la planète, en un point M caractérisé par $OM = r$ et $O'M = r'$.
3. On considère maintenant que $r \gg R$ et on pose $OO' = a$, $\theta = (\mathbf{OO'}, \mathbf{OM})$. Expliciter $\phi(r, \theta)$, au second ordre non nul en a/r.

Réponses : $\mathbf{E} = -\frac{\mathcal{G}M}{R^3}\mathbf{OO'}$, uniforme ; $V = -\mathcal{G}M(\frac{1}{r} - \frac{R'^3}{R^3}\frac{1}{r}')$, $V = -\frac{\mathcal{G}M}{r}(1 - \frac{R'^3}{R^3}(1 + \frac{a}{r}\cos\theta))$.

C. Propriétés de symétries

6. Développement du potentiel d'un système de quatre charges

Quatre charges identiques Q se situent au sommet d'un carré dont la diagonale vaut $2a$, voir la figure 3.

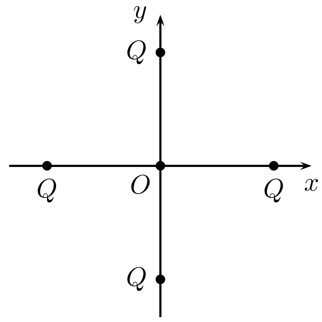

FIG. 3 – Ensemble de quatre charges

1. Quel est le champ au centre O du carré ?
2. Soit un point $M(x, y, z)$ un point très voisin de O. Donner un développement limité au premier ordre en x/a, y/a et z/a du champ électrique qui y est créé.
3. Vérifier que la divergence de ce champ est nulle. Expliquer.
4. Une particule q ($qQ > 0$) et de masse m est lancée d'un point $M_0(x_0, y_0)$ avec une vitesse $\mathbf{V_0} = u_0\mathbf{e}_x + v_0\mathbf{e}_y$. Déterminer sa trajectoire et montrer que son mouvement est périodique. Exprimer sa pulsation en fonction des données. Étudier le cas particulier d'une vitesse initiale nulle.
5. Peut-on conclure de ce qui précède que O est une position d'équilibre stable de la particule ?
6. On écrit le potentiel en M sous la forme d'un développement limité à l'ordre 2 :

$$V(x, y, z) = V_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Fyz + Gzx$$

Montrer rapidement, sans calculs, que divers coefficients sont nuls et que d'autres sont égaux. Donner la seule forme acceptable de $V(M)$, vérifier la compatibilité avec ce qui précède.

D. Conduction

7. Expérience de Rowland

Un disque métallique de rayon R, initialement neutre, et isolé, tourne uniformément autour de son axe à raisons de N tours par seconde. Une partie des électrons du métal (électrons de conduction) étant supposée se déplacer librement sous l'effet d'une force quelconque.

1. Montrer que, lorsque le disque tourne, l'équilibre relatif des électrons de conduction implique en chaque point l'existence d'un champ électrique dont on précisera la direction et le sens.
2. Calculer la différence de potentiel entre le centre et la périphérie du disque.
3. Conclure. A.N. : $N = 100$tours s^{-1} ; $R = 10$ cm ; $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg.

Réponses : $\mathbf{E} = \frac{m4\pi^2N^2}{e} r\mathbf{e}_r$; $\Delta V = \frac{m2\pi^2N^2R^2}{e} \simeq 10^{-8}$ V.

8. Conduction électrique orthoradiale

Une pièce métallique trouée, constituée d'un métal homogène de conductivité σ, est assimilée à l'espace défini en coordonnées cylindriques $-h/2 < z < h/2$ et $R_1 < r < R_2$. La pièce porte de plus dans le demi plan $\theta = 0$ un trait de scie dont on négligera l'épaisseur, voir la figure 4. Les deux bords sont soumis à une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$. La pièce est parcourue par des courants dont la densité volumique est $\mathbf{j}$, elle constitue un dipôle dont la résistance est R.

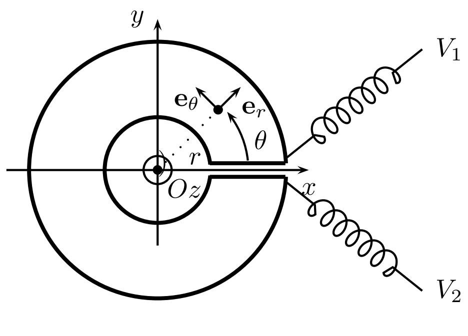

FIG. 4 – Pièce métallique

On admet une structure circulaire des lignes de courant.

1. Préciser la forme de **j** et de **E**. Préciser les conditions aux limites.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$.
3. Expliciter $V(r, \theta, z)$.
4. Exprimer **j** et **E**. Calculer la résistance R.

   On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$