

## Exercices : 23 - Points, Systèmes de points

### A. Cinématique du point matériel

#### 1. Le vol de la libellule

Une libellule, assimilée à un point matériel  $M$ , vole à vitesse constante  $v_0$  dans le plan horizontal ( $Oxy$ ) en gardant un œil sur sa proie, qui reste fixe à l'origine  $O$  des coordonnées. La vitesse de la libellule fait ainsi un angle constant  $\alpha$  avec la direction  $MO$ . On note  $a$  la valeur initiale de la distance  $MO$ .



1. Au bout de combien de temps la libellule rencontrera-t-elle sa proie ?
2. De quel angle aura-t-elle tourné autour de cette dernière ?
3. Quelle était la nature de la trajectoire de la libellule ?
4. Déterminer l'accélération initiale de la libellule.

### B. Lois de composition des vitesses et des accélérations

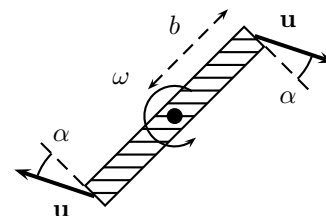
#### 2. Translation

Un parachute  $P$ , assimilé à un point matériel, tombe verticalement à la vitesse limite  $v$  par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ . A la date  $t = 0$ , il est situé à l'altitude  $h$  au dessus du point  $O$ , origine d'un repère  $Oxy$  de  $\mathcal{R}$ . A cette même date  $t = 0$ , un train passe en  $O$ . On note  $O'x'y'$  le repère attaché au train qui constitue de le référentiel  $\mathcal{R}'$ ,  $O$  et  $O'$  sont confondus à la date  $t = 0$ .

1. Le train a une vitesse uniforme  $V$  horizontale. Établir l'expression de l'accélération de  $P$  puis de la vitesse de  $P$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . Déterminer la trajectoire de  $P$  par rapport à un voyageur assis dans le train.
2. Le train aborde à la même vitesse  $V$  une rampe formant l'angle  $\alpha$  avec l'horizontale. Reprendre les questions précédentes.
3. Le train démarre de  $O$  avec un mouvement rectiligne horizontal d'accélération constante  $a$ . Déterminer la trajectoire de  $P$  par rapport à un voyageur assis dans le train.
4. On donne  $V = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  pour le premier cas,  $\alpha = 30^\circ$  pour le second et  $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  pour le troisième cas. Sachant que pour le voyageur, le parachute atteint le sol dans une direction par rapport à l'horizontale inclinée d'un angle de  $\theta_1 = 30^\circ$  dans le premier cas,  $\theta_2$  dans le second et  $\theta_3 = 45^\circ$  dans le troisième, déterminer les valeurs de  $v$ ,  $h$  et  $\theta_2$ .

#### 3. Arroseur de jardin

Un tourniquet hydraulique destiné à l'arrosage des jardins est constitué de deux bras symétriques, de longueur  $b$ , qui tournent autour d'un axe vertical avec la vitesse angulaire constante  $\omega$ . L'eau est éjectée par les extrémités des bras avec une vitesse par rapport au bras égale à  $\mathbf{u}$  et faisant un angle  $\alpha$  avec la normale aux bras. La vitesse  $\mathbf{u}$  est considérée comme constante.



1. Exprimer les vitesses relative, d'entraînement et absolue pour l'eau. Le référentiel absolu étant le référentiel terrestre.
2. Même question pour les accélérations.

### C. Interaction à force centrale

#### 4. Potentiel de Yukawa

Dans la théorie de Yukawa sur les forces nucléaires, l'interaction attractive entre un neutron et un proton est caractérisée par l'énergie potentielle suivante, fonction de la distance qui sépare un neutron et un proton :

$$E_{pot}(r) = \frac{K}{r} \cdot \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$a$  étant une distance caractéristique et  $K$  une constante négative de l'interaction. L'énergie potentielle effective est représentée sur la figure 1.

1. Trouver l'expression de la force d'interaction correspondant à l'énergie potentielle  $E_{pot}(r)$ .
2. Donner l'expression de l'énergie potentielle effective  $E_{pot,eff}(r)$  en fonction de la masse réduite  $\mu$  du système et de son moment cinétique  $L$  dans le référentiel du centre de masse.
3. Le graphe  $E_{pot,eff}(r)$  a l'allure représentée ci-dessus. Discuter les différents mouvements possibles suivant la valeur de l'énergie  $E$ .

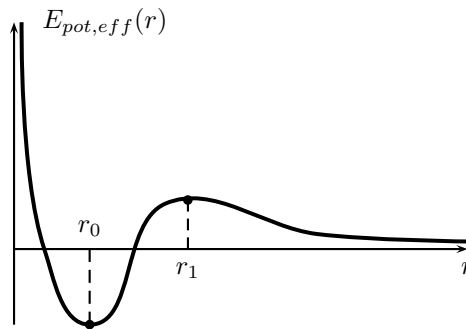


FIG. 1 - Énergie potentielle effective

4. Quelle est l'équation qui relie les différentes constantes  $L$ ,  $a$ ,  $\mu$  et  $K$  à la valeur  $r_m$  pour laquelle la dérivée de  $E_{pot,eff}(r)$  est nulle ?
5. Calculer le moment cinétique  $L$  et l'énergie  $E$  dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon  $r_0$ .

**5. Trajectoire bornée**

Une particule  $M$  de masse  $m$  est soumise à un champ de force de centre  $O$  associé à l'énergie potentielle  $U = m \left( \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \right)$ ,  $a$  et  $b$  étant des constantes non nulles et  $r$  la distance au centre attracteur.

Les conditions initiales sont  $r = r_0$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ . L'angle entre  $r = r_0$  et  $\mathbf{v}_0$  est  $\alpha_0$ .

1. À quelles conditions portant sur  $a$ ,  $b$ ,  $r_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  et  $\alpha_0$  la trajectoire de la particule est-elle circulaire ?
2. À quelles conditions portant sur  $a$ ,  $b$ ,  $r_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  et  $\alpha_0$  est-il possible que la trajectoire de la particule reste bornée ?

Réponses :  $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{r}_0$  et  $v_0 = \sqrt{-\left(\frac{a}{r_0} + \frac{2b}{r_0^2}\right)}$  avec  $ar_0 + 2b < 0$ ,  $\frac{1}{m}E_{pot,eff} = \frac{a}{r} + \frac{b'}{r^2}$  avec  $b' = b + \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2}$ , si  $a < 0$  et  $b' > 0$  alors mouvements bornés possibles, idem pour  $a < 0$  et  $b' < 0$  ainsi que  $a > 0$  et  $b' < 0$ .

**6. Mouvements d'une comète**

La terre décrit autour du soleil une orbite circulaire de rayon  $a$  (appelé unité astronomique) à la vitesse constante  $u = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

En 1843, une comète quasi-parabolique est passée très près du soleil, la distance minimale de la comète au soleil (périhélie) étant  $d = \epsilon a = 5,53 \times 10^{-3} a$ . Par la suite, des mesures fines ont amené les astronomes à prédire une distance maximale au soleil (aphélie) égale à  $D = \gamma a = 130 a$ .

1. Déterminer et commenter la vitesse maximale de la comète. Déterminer aussi la vitesse minimale de la comète sur son orbite.
2. En quelle année peut-on espérer revoir la comète ?
3. Pour l'étude détaillée du mouvement de la comète, on doit prendre en compte des perturbations dues à la résultante des forces exercées par les autres planètes du système solaire. On montre qu'on les ramène à un supplément (faible) de force attractive, de la forme  $f = k \times r^{-4}$ , où  $k$  est une constante et  $r$  la distance de la comète au centre du Soleil. Quel est, qualitativement ou quantitativement, l'effet de cette force sur la trajectoire de la comète ?

**D. Interaction quelconque de deux corps**

**7. Oscillateur sur profil cylindrique**

Un élastique est assimilé à un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Il est fixé à une extrémité à un point fixe  $O$  et à l'autre extrémité à un point matériel  $M$  de masse  $m$ . Le point  $M$  circule sans frottement sur un quart de cercle de centre  $C$ , de rayon  $a$ , disposé dans un plan vertical.  $C$  et  $O$  sont sur la même horizontale, voir la figure 2. Sur une partie  $OA$  de sa longueur, l'élastique est disposé sur le plan horizontal passant par  $O$  et  $C$ . Sur l'autre partie  $AM$ , il est aussi rectiligne. On suppose que  $OA = l_0$  et on appelle  $\theta$  l'angle entre  $CA$  et  $CM$ .

1. Établir une intégrale première du mouvement.
2. Déterminer la valeur de l'angle  $\theta$  à l'équilibre.
3. Discuter de la stabilité de cet équilibre et déterminer la fréquence des petites oscillations de  $M$  autour de l'équilibre stable.

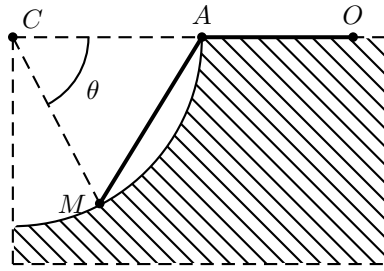
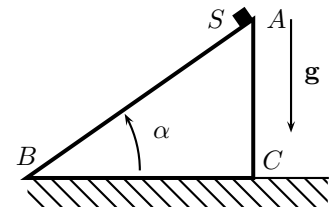


FIG. 2 – Oscillateur sur profil cylindrique

### 8. Glissement et référentiel non galiléen

Le petit solide  $S$  de masse  $m$  peut glisser sans frottement sur la face inclinée  $AB$  de longueur  $L$  de l'équerre de masse  $M$ . Cette équerre peut elle-même glisser sans frottement sur le plan horizontal. On abandonne le système sans vitesse initiale,  $S$  étant en  $A$ .

En négligeant la dimension de  $S$  devant celle de  $AB$ , déterminer le temps que met  $S$  pour atteindre le point  $B$ .



### 9. Mouvement étudié en référentiel non galiléen

Un point matériel de masse  $M$  formant un anneau est astreint à se déplacer sans frottement autour d'un cerceau de centre  $C$  et de rayon  $R$  situé dans un plan vertical et qui tourne à la vitesse angulaire constante  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  autour d'un axe vertical ( $Oz$ ) tangent au cerceau (cf. figure 3). On appelle  $(Oxyz)$  un référentiel galiléen et on note  $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  la base polaire rigidement liée au cerceau. On appelle encore  $g$  l'accélération de la pesanteur. Enfin, un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide négligeable relie le point matériel à l'axe de rotation; son point d'attache sur cet axe  $y$  glissant sans frottement, on admettra que le ressort reste en permanence orthogonal à l'axe de rotation. On appelle  $\varphi$  l'angle formé par  $CM$  relativement à l'horizontale. On posera  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ .

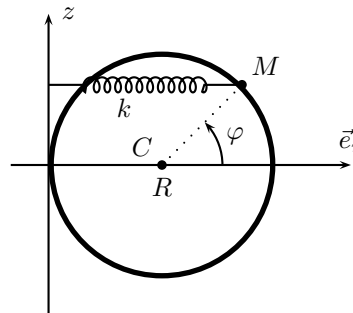


FIG. 3 – Cerceau tournant

- Déterminer l'équation définissant les positions d'équilibre relatif; on donnera deux méthodes. Établir aussi une équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $\varphi$ . On introduira les conditions initiales  $\varphi(t=0) = \varphi_0$  et  $\dot{\varphi}(t=0) = 0$ .
- A quelle condition (sur  $\omega$ ) peut-on négliger les effets de la pesanteur? Que deviennent alors les positions d'équilibre? Étudier leur stabilité. On se placera pas dans ce cas dans la suite.
- Dans le cas des oscillations autour de  $\varphi = \pi$ , quelle relation lie la période des oscillations et la position initiale?
- On suppose maintenant que  $\omega = \omega_0$ . Déterminer la nature du mouvement de  $M$ .
- Si on lance le point matériel à partir de  $\varphi = 0$ , à quelle condition pourra-t-il parcourir le cercle entier?

Réponses :  $\Sigma \mathbf{f} + \mathbf{f}_{ent} = \mathbf{0}$  ou bien  $\frac{dE_{pot}}{d\varphi} = 0$ ;  $E_{pot} = E_{pot,ressort} + E_{pot,ent} + E_{pot,pes}$ ,  $E_{pot} = \frac{1}{2}MR^2(\omega_0^2 - \omega^2)(1 + \cos \varphi)^2 + MgR \sin \varphi$ , équilibre  $R(\omega_0^2 - \omega^2)(1 + \cos \varphi) \sin \varphi = g \cos \varphi$ ,  $E_c = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2$ ,  $\dot{\varphi}^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)[(1 + \cos \varphi_0)^2 - (1 + \cos \varphi)^2] + \frac{2g}{R}(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$ ;  $R\omega^2 \gg g$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $\frac{d^2E_{pot}}{d\varphi^2} = MR^2(\omega^2 - \omega_0^2)(\cos \varphi + \cos 2\varphi)$ , si  $\omega > \omega_0$ ,  $\varphi = 0$  stable,  $\varphi = \pi$  instable même si  $\varphi_0 = \pi$  alors  $\varphi = \pi \forall t$ , si  $\omega < \omega_0$ , c'est l'inverse; ici  $\omega < \omega_0$   $\varphi_0 = \pi + \epsilon_0$  et  $\varphi = \pi + \epsilon$ ,  $T = \frac{8}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} \int_0^{\epsilon_0} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon_0^4 - \epsilon^4}}$ ;  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{R} \cos \varphi = 0$ ;  $\dot{\varphi}_0^2 = \frac{2g}{R}$ .