Exercices : 16 - Guides d'ondes

A. Géométrie cartésienne

1. Structure des courants surfaciques

On considère un guide d'ondes rectangulaire fonctionnant dans le mode TE_{n0} dont on rappelle les seules coordonnées non nulles pour les champs :

$$E_y = A\sin(n\frac{\pi x}{a})\cos(kz-\omega t)$$

$$B_x = -\frac{k}{\omega}A\sin(n\frac{\pi x}{a})\cos(kz-\omega t) \qquad \text{et} \qquad B_z = \frac{n\pi}{a\omega}A\cos(n\frac{\pi x}{a})\sin(kz-\omega t)$$

ainsi que la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - n^2\frac{\pi^2}{a^2}$. On désigne par les indices 1, 2, 3 et 4 les faces $x=0$, $y=0$, $x=a$ et $y=b$.

1. A l'aide des résultats rappelés ci-dessus, montrer que les courants superficiels sur les diverses faces sont :

$$\mathbf{j_{s1}} = -\frac{n\pi A}{\mu_0 a\omega}\sin(kz-\omega t)\mathbf{e}_y \qquad \text{et} \qquad \mathbf{j_{s3}} = (-1)^{n+1}\mathbf{j_{s1}}$$

$$\mathbf{j_{s2}} = \frac{A}{\mu_0\omega}[\frac{n\pi}{a}\cos(\frac{n\pi x}{a})\sin(kz-\omega t)\mathbf{e}_x + k\sin(\frac{n\pi x}{a})\cos(kz-\omega t)\mathbf{e}_z] \qquad \text{et} \qquad \mathbf{j_{s4}} = -\mathbf{j_{s2}}$$

2. La figure 1 représente à la date $t=0$ l'allure que les courants superficiels d'une tranche du guide d'onde définie par $0 < z < \lambda = \frac{2\pi}{k}$ pour le mode dominant TE_{10}, seul étudié dans ce qui suit. Expliquer pourquoi une telle structure serait inacceptable pour des courants permanents.

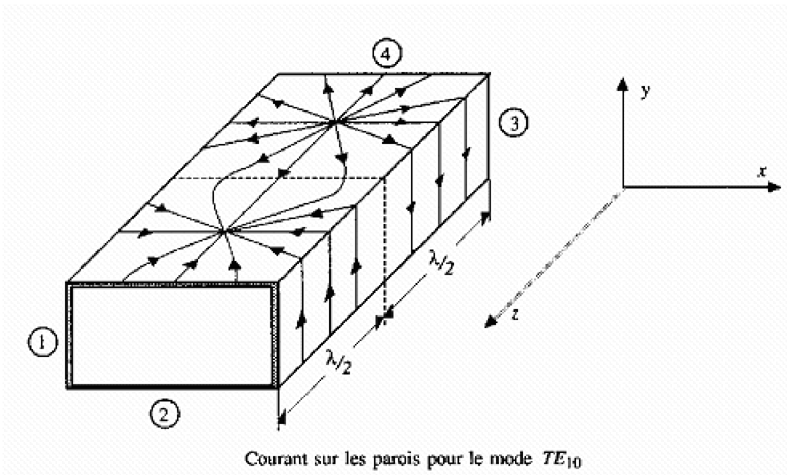

FIG. 1 – Structure des courants surfaciques en mode TE_{10}

3. Soit σ la charge superficielle de la face supérieure 4 du guide d'onde. En distinguant les régions $0 < z < \lambda/2$ et $\lambda/2 < z < \lambda$, calculer $\frac{\partial\sigma}{\partial t}$ et corréler le signe de cette quantité à l'allure des courants représentés.
4. En posant $\mathbf{j_{s4}} = \mathbf{j_s}$, calculer $\mathrm{div}\,\mathbf{j_s}$ et commenter le résultat. Que peut-on dire des courants sur les faces 1 et 3 ?
5. Pour introduire un détecteur d'ondes électromagnétiques, on a besoin de pratiquer une fente rectiligne dans une paroi du guide d'ondes. Où placer celle-ci de façon à perturber le moins possible le mode étudié ?

Réponses : inacceptable : les lignes de courant divergent ou convergent, $\frac{\partial\sigma}{\partial t} < 0$ les courants divergent, $\mathrm{div}\,\mathbf{j}_s + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$, parallèlement aux lignes de courant, ne pas les couper.

2. Onde guidée Transversale Magnétique

Une onde électromagnétique dont les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont définis par leurs composantes en coordonnées cartésiennes, se propage suivant la direction Oz d'un guide d'onde dont la section est un rectangle de largeur a suivant Ox et de longueur $b > a$ selon Oy. Les parois sont parfaitement conductrices et le milieu intérieur est assimilable au vide.

1. Montrer que les composantes E_x, E_y, B_x et B_y se déduisent de la composante E_z que l'on suppose de la forme :

$$E_z = E_z^0(x,y)\exp i(k_g z - \omega t)$$

où k_g est la norme du vecteur d'onde de l'onde guidée dans le cas d'une onde dite TM. On posera $k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$.

2. Établir que l'équation de propagation de E_z s'écrit :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0$$

Trouver la relation liant k, k_c et k_g.

3. Montrer, avec les conditions aux limites, que :

$$E_z = E^0 \sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\exp i(k_g z - \omega t)$$

avec m et n entiers. Relier k_c à m, n, a et b.

4. Un mode est caractérisé par un couple de valeurs de m et n. Donner l'expression de $\mathbf{E}$ puis celle de $\mathbf{B}$. Dans quel domaine doit varier la fréquence du générateur pour n'obtenir qu'un seul mode ? Le reconnaître. Calculer le vecteur de Poynting. Montrer que seule sa composante suivant Oz a une valeur moyenne non nulle. A quelle vitesse correspond la propagation de l'énergie ?

3. Onde modulée

On étudie la propagation dans le vide d'une onde de champ électrique $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_y \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)$, limitée à la région de l'espace $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide.

1. Déterminer le champ magnétique de l'onde.
2. Déterminer la relation de dispersion, liant ω et k. L'onde est-elle dispersée ? atténuée ? Dans le cas où il y a propagation, déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
3. Déterminer, par un calcul direct, la vitesse de l'énergie transportée par l'onde. Commenter.

4. Cavité résonante et circuit résonant LC

Une cavité parallélépipédique est définie par :

$$0 \le x \le a \quad ; \quad 0 \le y \le b \quad ; \quad 0 \le z \le c$$

Elle est vide et délimitée par des plans parfaitement conducteurs. Un générateur de haute fréquence entretient dans cette cavité une onde électromagnétique sinusoïdale de pulsation ω.

1. Montrer que le champ électrique suivant est solution de l'équation d'onde pourvu que la pulsation ait une valeur que l'on déterminera.

$$\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_z \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\exp -i\omega t$$

2. Quel est le champ magnétique associé ?
3. Calculer la moyenne spatiale de l'énergie volumique électrique, puis de l'énergie volumique magnétique. Montrer que l'énergie électromagnétique volumique est constante en moyenne et qu'elle oscille périodiquement entre sa forme électrique et sa forme magnétique.
4. Calculer la charge surfacique sur les parois et montrer que la cavité se comporte comme un condensateur plan dont on évaluera la charge. Déduire de l'énergie la valeur de sa capacité.
5. En s'appuyant sur une analogie avec un circuit résonnant LC, trouver le coefficient d'auto-inductance de cette cavité. Expliquer son origine physique.

B. Géométrie cylindrique

5. Guide d'ondes à section circulaire

On étudie la propagation d'une onde dans le vide intérieur à un câble coaxial de grande longueur. Celui-ci, d'axe Oz, est limité par un câble intérieur de rayon a et un câble cylindrique extérieur de rayon $b > a$. Le milieu compris entre a et b est assimilé au vide. L'onde est décrite en coordonnées cylindriques d'axe Oz :

$$\mathbf{E}(r,z,t) = f(r)g(t,z)\mathbf{e}_r \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B}(r,z,t) = h(r)g(t,z)\mathbf{e}_\theta$$

1. Vérifier que les conditions aux limites ne sont pas remises en cause par les formes données aux champs.
2. Exprimer les équations de Maxwell et en déduire les relations vérifiées par les fonctions f, g et h en utilisant un formulaire donnant les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques.
3. Déterminer complètement les champs électrique et magnétique de l'onde et les constantes K et v dans le cas où les champs sont donnés à la surface de l'armature intérieure par les expressions :

$$\mathbf{E}(r=a,t) = E_0 g(z-vt)\mathbf{e}_r \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B}(r=a,t) = KE_0 g(z-vt)\mathbf{e}_\theta$$

4. Exprimer alors le vecteur de Poynting et la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique.

Réponses : $\mathbf{E}_{tan} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}_{nor} = \mathbf{0}$, $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rf)}{\mathrm{d}r} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial z} f = -h\frac{\partial g}{\partial t}$, $-h\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{c^2} f \frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rh)}{\mathrm{d}r} = 0$, $f(r) = \frac{\alpha}{r}$, $h(r) = \frac{\beta}{r}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$, $v = c = 1/K$, $\alpha = \beta c = \frac{E_0 a}{r}$, $\mathbf{\Pi} = \frac{E_0^2 a^2}{\mu_0 c r^2} g^2(z-ct)\mathbf{e}_z$, $v_{\text{énergie}} = c = \frac{\Pi}{u}$.