Exercices : 15 - Rayonnement dipolaire

1. Influence de la foudre

Un dipôle élémentaire placé en M produit les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en un point A situé à la distance r dans une direction perpendiculaire à son moment dipolaire $\delta\mathbf{p}(t)$. Les champs sont donnés avec les notations habituelles des coordonnées sphériques, par les deux expressions ci-dessous. On notera que la dérivée $\delta\dot{\mathbf{p}}(t)$ doit être évaluée, à l'instant t et à la distance r, pour la valeur $u = t - \frac{r}{c}$ de l'argument :

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\delta p + \frac{r}{c}\delta\dot{p} + \frac{r^2}{c^2}\delta\ddot{p})\mathbf{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}(\delta\dot{p} + \frac{r}{c}\delta\ddot{p})\mathbf{e}_\varphi$$

1. Quel est le sens physique du remplacement de $\delta p(t)$ par $\delta p(t - r/c)$?
2. Dans une région de l'espace, à définir, les champs produits par un dipôle élémentaire $\delta p(t)$ dirigé selon Oz s'expriment par :

$$\delta\mathbf{E} = \frac{\delta p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}Idz\mathbf{e}_\varphi$$

   Commenter ces résultats.
3. Calculer l'ordre de grandeur du champ magnétique créé par un courant de crête (lors d'un coup de foudre) de 10^5 A circulant dans un élément de longueur de 1 m à une distance de 100 m. Faire une comparaison intelligente.
4. Donner l'expression des champs rayonnés à très grande distance ($r \gg \lambda$). Commenter. On exprimera en particulier le rapport E/cB.

   On considère un point A situé très loin d'une antenne de hauteur H. On tient maintenant compte de la répartition du courant de foudre le long de la hauteur z de l'éclair de foudre. Chaque dipôle élémentaire rayonne une onde plane dans la même direction quasi orthogonale à l'antenne. On peut admettre que l'intensité $I(z,t)$ dans l'antenne est de la forme :

$$I(z,t) = -I_0(1 - \exp(\frac{z - 0,01ct}{c\tau}))$$

   avec $I_0 = 80$ kA et $\tau = 80$ µs.
5. Calculer les champs électromagnétiques rayonnés par l'antenne de hauteur H.
6. Évaluer à l'instant $t = 40$ µs, la valeur du champ électrique pour $r = 10$ km et $H = 1$ km.

2. Antenne demi-onde

Une antenne demi–onde est constituée d'un fil rectiligne de longueur $L = \lambda/2$ colinéaire à l'axe (Oz) et de point milieu O origine des espaces. Alimentée par un amplificateur de puissance, elle est parcourue par le courant $i(z,t) = I_0\cos(\pi z/L)\cos(\omega t)$.

On rappelle que l'expression du champ électrique élémentaire rayonné par un élément de courant $I(P)\mathrm{d}z$ localisé au niveau du point P en un point M repéré par ses coordonnées sphériques $r = OM$, $\theta = (\mathbf{e}_z, \mathbf{OM})$ est :

$$\mathrm{d}\mathbf{E} = \frac{i\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin\theta}{r}I(P)\mathrm{d}z\exp i(\omega(t - \frac{PM}{c}))\mathbf{e}_\theta$$

1. Exprimer le courant d'antenne en notation complexe $\bar{i}(z,t)$.
2. On souhaite déterminer le champ électrique $\bar{\mathbf{E}}(M,t)$ en M dans la zone de rayonnement. Pour ce faire, on considère un élément de courant $\bar{i}(z,t)\,dz\,\mathbf{e}_z$, au point N de l'antenne à la cote z. Exprimer en fonction de z et de θ, la différence de marche δ entre les ondes rayonnées par N et par O dans la direction définie par (θ,φ) en coordonnées sphériques d'axe Oz.
3. Déterminer en notation complexe, l'expression du champ électrique $\bar{\mathbf{E}}(M,t)$ rayonné par l'antenne en M dans la direction (θ,φ). On donne $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\exp(iax)\,dx = 2\frac{\cos\frac{a\pi}{2}}{1-a^2}$.
4. En déduire le champ électrique cherché, $\bar{\mathbf{E}}(M,t) = i\mu_0 c I_0\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{2\pi r\sin\theta}\exp i(\omega t - kr)\mathbf{e}_\theta$.
5. Donner l'expression du champ magnétique $\bar{\mathbf{B}}(M,t)$ rayonné par l'antenne.
6. Exprimer le vecteur de Poynting $\mathbf{R}(M,t)$ et la moyenne temporelle de sa norme $\langle R\rangle$.

7. Sachant que $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}d\theta = 1,22$, calculer la puissance moyenne P rayonnée par cette antenne.
8. La résistance de rayonnement d'une antenne demi-onde est la grandeur r définie par $P = \dfrac{1}{2}rI_0^2$ où I_0 est l'intensité au ventre d'intensité de l'antenne. Déterminer r pour une antenne demi–onde et justifier la dénomination de résistance de rayonnement. Calculer numériquement r.
9. Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0, pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est $P = 2100$ kW (puissance de l'émetteur Grande Ondes de France Inter à Allouis) ?

   Quelle est l'intensité du champ électrique rayonné dans le plan équatorial de cette antenne ($\theta = \pi/2$) à la distance $d = 100$ km de l'antenne ?

3. Stabilité d'un atome

Un électron de charge $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C et de masse $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg est en orbite circulaire de rayon $r_0 = 53$ pm autour d'un proton supposé fixe au point O. Un tel atome constitue à la fois un dipôle électrique rayonnant et un dipôle magnétique rayonnant. Toutefois, on pourrait montrer que le rayonnement dipolaire magnétique est négligeable devant le rayonnement dipolaire électrique.

1. Déterminer la vitesse v_0 et l'énergie E_0 de l'électron. Exprimer aussi son accélération γ_0.
2. Donner l'expression du moment dipolaire électrique $\mathbf{p}$ et du moment dipolaire magnétique $\mathbf{m}$ de ce dipôle.
3. Préciser l'état de polarisation du rayonnement émis par l'électron dans le plan de l'orbite d'une part, et sur l'axe de révolution de cette orbite d'autre part.
4. Exprimer la puissance moyenne P_0 émise par l'électron ; en déduire l'énergie perdue par révolution ΔE.
5. Calculer aussi $\Delta E/E$ et la variation $\Delta r/r$ du rayon de l'orbite par tour.
6. Déterminer la loi d'évolution du rayon r de la trajectoire. Calculer la durée de vie τ de ce niveau fondamental ; comparer à la période du mouvement initial ; conclure.
7. Les durées des transitions $2p \hookrightarrow 1s$ et $6h \hookrightarrow 5g$ de l'atome d'hydrogène sont (expérimentalement) mesurées à $\tau_{2p\hookrightarrow 1s} = 1,6$ ns et $\tau_{6h\hookrightarrow 5g} = 0,61$ µs. Comparer au modèle ci-dessus ; commenter.

Réponses : $v_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0 m}} = 2,2\times 10^6$ m · s^{-1}, $\gamma_0 = \frac{v_0^2}{r_0} = 9\times 10^{22}$ m · s^{-2}, $E_0 = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} = -2,2\times 10^{-18}$ J $= -13,6$ eV ; $\mathbf{p} = -er_0\mathbf{e}_r$, $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}ev_0r_0\mathbf{e}_z$; polarisation rectiligne dans le plan de l'orbite, polarisation circulaire sur l'axe de l'orbite ; $P_0 = \frac{\mu_0 e^2 v_0^4}{12\pi c r_0^2}$, $\Delta E = -\frac{\mu_0 e^2 v_0^3}{6 c r_0}$; $\frac{\Delta E}{E} = -\frac{8\pi}{6}\frac{v_0^3}{c^3} \simeq -1,65\times 10^{-6}$, $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta r}{r}$; $E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -P$, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{v^4}{c^3}$, $m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $r^3 - r_0^3 = -\frac{e^4}{8\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 c^3}t$, $\tau = \frac{8\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 c^3 r_0^3}{e^4} = 3\times 10^{-11}$ s, $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 1,5\times 10^{-16}$ s, le raisonnement sur des orbites circulaires est justifié ; le modèle de Bohr ne convient pas, il faut un modèle quantique.