

Exercices : 11 - Interféromètre de Michelson

A. Formes de la figure d'interférences

1. Étude d'un coin d'air

Un interféromètre de Michelson est monté en coin d'air. L'angle entre les deux miroirs est $\alpha = 5 \times 10^{-4}$ rad. Il est éclairé sous une incidence quasi-normale par une source étendue spatialement. Celle-ci émet deux radiations de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 d'égale intensité.

1. Donner l'expression de l'éclairement obtenu sur le coin d'air équivalent en fonction de x , coordonnée définie le long d'un des deux miroirs.
2. Les valeurs des longueurs d'onde sont $\lambda_1 = 486$ nm et $\lambda_2 = 434$ nm. Compte tenu de ces valeurs, donner une idée de l'allure de la courbe $E(x)$. Calculer la période de la visibilité (contraste).

Réponses : $E(x) = \frac{E_{max}}{2} (1 + \cos[\frac{2\pi\alpha x(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}]) \cos[\frac{2\pi\alpha x(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}]$; 8, 1 mm.

2. Anneaux de Haidinger

On considère un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air (on appellera M_1 le miroir mobile et M_2). Il est éclairé par la raie verte de la lampe à vapeur de mercure de longueur d'onde $\lambda = 546,1$ nm. L'épaisseur de la lame d'air constituée est e , elle est très voisine de 1 cm.

1. Décrire un tel interféromètre.
2. En admettant qu'il y ait au centre un maximum d'intensité lumineuse, calculer les rayons des 4 premiers anneaux brillants dans le plan focal d'un objectif de focal 1 m.
3. Calculer la longueur d'onde λ' qui provoquerait un déplacement des anneaux d'une frange vers l'extérieur de la figure. Que pensez-vous de la valeur trouvée?

On éclaire maintenant avec uniquement la raie verte du mercure l'interféromètre réglé au contact optique.

4. Décrire la figure d'interférences.

En fait, à la suite d'une mauvaise manipulation, le miroir M_2 présente une légère déformation au niveau de son centre. Cette déformation est modélisée par une calotte sphérique de rayon $R = 10$ m.

5. Expliquer pourquoi la figure d'interférences est à nouveau constituée d'anneaux. Calculer les rayons des 4 premiers anneaux brillants.

3. Doublet du sodium - Influence sur le contraste

Un interféromètre de Michelson est réglé de telle sorte que ses miroirs soient exactement perpendiculaires et qu'on se trouve au contact optique. Il est éclairé en lumière parallèle au moyen d'une lampe à vapeur de Sodium ne fournissant que les seules raies du doublet de la raie D : $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm. Un moteur déplace lentement un des miroirs perpendiculairement à son plan à vitesse constante V . On note x l'épaisseur de la lame d'air ainsi constituée. On mesure en permanence l'éclairement au centre de la figure d'interférence en disposant un capteur CCD au foyer principal image d'une lentille mince convergente disposée en sortie de l'interféromètre.

1. Établir l'expression de l'éclairement E en fonction du temps t .
2. Donner l'allure de la courbe correspondante et le nombre de franges claires enregistrées entre deux annulations du contraste.
3. Quelle est la valeur de la fréquence du signal électrique produit par le capteur si la vitesse est de déplacement du miroir est $V = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$? Que faudrait-il faire pour obtenir sur un oscilloscope directement la fonction de contraste? Quelle application pourrait-on faire de cette expérience?

B. Applications

4. Mesure de l'épaisseur d'une mince lame de verre

Un interféromètre de Michelson est réglé avec ses miroirs exactement perpendiculaires. Le faisceau incident issu d'une source primaire étendue S est monochromatique ($\lambda = 500$ nm). A partir de la situation où on est au contact optique, on déplace le miroir M_2 de 1 mm normalement à son plan.

1. Étudier les phénomènes d'interférences qui apparaissent au voisinage de l'incidence normale, dans le plan focal d'une lentille convergente. Déterminer la phase au centre et l'ordre d'interférence du 2^{ème} anneau sombre.
2. On place sur l'un des bras une lame mince d'épaisseur $t = 7,5 \text{ } \mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,50$. Trouver la variation de l'ordre d'interférence au centre.

3. On remplace la source primaire par une source ponctuelle, placée au foyer d'une lentille mince convergente. Initialement les deux miroirs sont perpendiculaires et au contact optique. Qu'observe-t-on au foyer image de la seconde lentille lorsqu'on éloigne M_2 de la lame séparatrice ?
4. A quelle condition et comment peut-on mesurer l'épaisseur de la lame de verre ?

Réponses : $\varphi_0 = 8000\pi$, $p_{2s} = 3998,5$; $\Delta p = 15$; un point « alternant » lumineux.

5. Spectrométrie par transformée de Fourier

On éclaire un interféromètre de Michelson monté en lame d'air d'épaisseur e avec une raie quasi-monochromatique, caractérisée par son profil spectral :

$$\frac{dE_0}{d\sigma} = f(\sigma) = C \exp - \left(\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{a^2} \right)$$

où $\sigma = 1/\lambda$ et où σ_0 , C et $a \ll \sigma_0$ sont des constantes positives. Pour simplifier, on étendra la fonction f aux valeurs négatives de σ , domaine où elle prend des valeurs négligeables.

1. Quelle est la signification de σ_0 ? Calculer la largeur $\Delta\sigma$ du profil à mi-hauteur et interpréter la constante a . Faire un graphique rapide du profil spectral.
2. On réalise un enregistrement de l'éclairement au centre de la figure d'interférences en fonction de l'épaisseur de la lame d'air qu'on fait varier en déplaçant un des miroirs avec l'aide d'un moteur. Établir l'expression de l'éclairement $E(e)$ en fonction de constantes et de la transformée de Fourier du profil spectral définie par :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \exp(2j\pi\sigma x) d\sigma$$

3. Sachant que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp -\frac{u^2}{a^2} \exp(2j\pi ux) du = a\sqrt{\pi} \exp -\pi^2 a^2 x^2$, établir l'expression de $E(e)$ et tracer l'allure de son graphe pour $\Delta\sigma \ll \sigma_0$. Comment évolue la visibilité des franges ? Comment peut-on mesurer $\Delta\sigma$? Quelle valeur de e doit-on pouvoir atteindre ?

6. Mesure de déformation

Un interféromètre de Michelson est réglé au contact optique : les deux miroirs sont orthogonaux, symétriques relativement à la lame séparatrice (cf. figure 1). L'un des miroirs est en fait légèrement déformé et forme une sphère, convexe, de grand rayon R .

Les miroirs sont éclairés par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde λ issu d'un point lumineux situé sur l'axe de l'interféromètre à la distance d de la lame séparatrice. L'observation est réalisée au foyer d'une lentille convergente de focale f' .

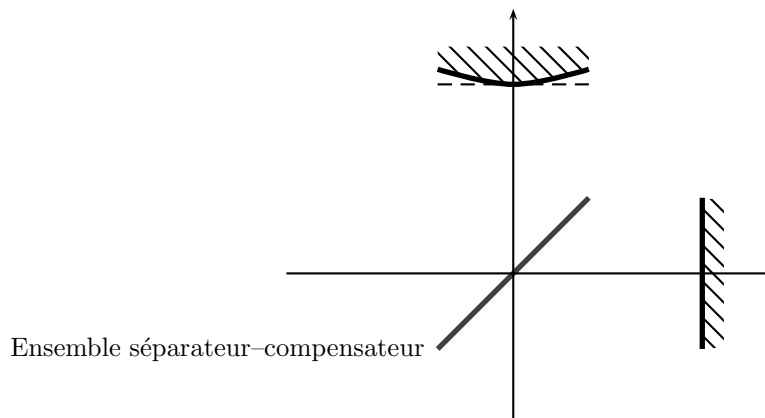


FIG. 1 - Déformation du miroir d'un interféromètre

1. On néglige d'abord toute déformation du miroir ; de plus, on admet que le système séparateur-compensateur introduit un déphasage de π entre les faisceaux qui se réfléchissent sur les deux miroirs. Quel est, au contact optique, l'aspect de l'écran d'observation ? Le contact optique est réalisé lorsqu'une même distance y sépare les deux miroirs du système séparateur-compensateur.
2. On prend maintenant en compte la déformation sphérique du miroir de l'interféromètre.
 - (a) Déterminer la position des deux images de la source données par les deux miroirs. Quelle est la distance d_{im} entre ces images ?

- (b) Montrer que ces deux images sont déphasés et calculer leur déphasage. On précisera la convention de signe choisie.
- (c) Quel est l'aspect du champ d'interférence ?
- (d) La distance entre le centre de la figure et la troisième frange brillante est $l = 5 \text{ cm}$; on donne $d = 1 \text{ m}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$, $f' = 50 \text{ cm}$ et $y = 10 \text{ cm}$. On fera l'hypothèse que le centre de la figure est un point sombre. Cette hypothèse sera vérifiée ensuite. Calculer R ; commenter.

7. Contrôle de déplacement

On utilise un interféromètre de Michelson en lame d'air d'épaisseur e avec une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 643,84896 \text{ nm}$. On désire, pour une application métrologique, mesurer un déplacement $\Delta e = 51225342 \text{ nm}$ d'un des miroirs à 10 nm près, provoquant une augmentation $\Delta p = p'' - p'$ de l'ordre d'interférences p . On note $E(p)$ l'éclairement et E_{max} sa valeur maximale.

- Comment mesurer très simplement la partie entière $ENT(p)$ de p ?
- Montrer que, compte tenu de la précision requise, il faut aussi mesurer la partie fractionnaire $p - ENT(p)$.
Pour cela, on détermine le signe de $\frac{dE}{dp}$ et on mesure $\rho = \frac{E(p)}{E_{max}}$ avec une incertitude absolue égale à $0,01$. Quel est le meilleur choix pour l'ordre d'interférences p' avant déplacement du miroir ? La précision est-elle suffisante ?

Réponses : Comptage des franges brillantes passant au centre ; $2\Delta e = \Delta p \lambda$ d'où $\Delta p = 159122,23$; $\Delta e^* = 10 \text{ nm}$, $\Delta p^* = 0,031$, mesure de la partie fractionnaire de p indispensable ; $E(p) = \frac{E_{max}}{2}(1 + \cos(2\pi p))$; $\frac{dE(p)}{dp} = -\pi E_{max} \sin(2\pi p)$, $\frac{d\rho}{d\rho} = -\pi \sin(2\pi p)$, choisir $\sin(2\pi p') = 1$, $\Delta p = \frac{\Delta \rho}{\pi} = 0,0031$, précision suffisante.