Exercices : 08 - Optique géométrique

A. Lois de Snell-Descartes

1. Prisme à réflexion totale

Un prisme de verre (figure 1) a pour section droite un triangle ABC rectangle en A. Il est éclairé par un faisceau parallèle de lumière monochromatique à la longueur d'onde λ_0 pour laquelle l'indice optique du verre relativement à l'air vaut n.

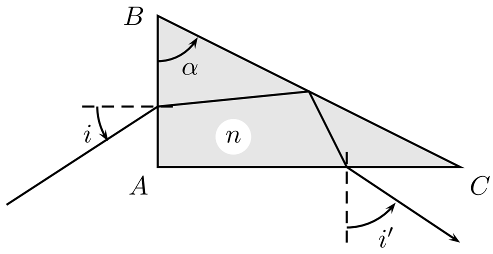

Fig. 1 – Prisme à réflexion totale

On étudie la marche de ce faisceau qui entre sur la face AB sous l'angle d'incidence i. Après réflexion totale sur la face BC, le faisceau sort du prisme par la face AC. On appelle α l'angle dièdre du prisme en B.

1. Définir et calculer la déviation D par le prisme en fonction seulement de i et de l'angle d'émergence du faisceau i' par la face AC.
2. Est-il possible d'obtenir un faisceau émergent perpendiculaire au faisceau incident ? Dans ce cas, montrer que n doit vérifier une inégalité que l'on précisera.

   Cette situation est-elle compatible avec une incidence normale ? une incidence rasante ?
3. On considère maintenant le cas où $n = 1,5$ et $\alpha = 60°$. Déterminer l'angle d'incidence i_0 correspondant à un faisceau émergent perpendiculaire au faisceau incident. Déterminer la variation $\mathrm{d}D$ de la déviation D lorsque i_0 varie de $\mathrm{d}i_0$.

2. Théorème de Bouguer

On étudie un milieu à symétrie sphérique : l'indice n ne dépend que de la distance r au centre de symétrie O. Un rayon lumineux aborde ce milieu dans un plan contenant O. Dans un milieu d'indice variable, on peut montrer que le rayon lumineux suit une trajectoire donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}(n\mathbf{u})}{\mathrm{d}s} = \mathbf{grad}\, n$$

où n est l'indice locale, $\mathbf{u}$ un vecteur unitaire tangent à la trajectoire du rayon lumineux et s l'abscisse curviligne.

1. Montrer que, dans le cadre du problème proposé à symétrie sphérique, la quantité $\mathbf{r} \wedge n\mathbf{u}$ est conservée par rapport à l'abscisse curviligne s. Le rayon vecteur est $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$.
2. Montrer alors que $n(r) r \sin i(r) =$ constante, où i est l'angle formé par le rayon lumineux avec la radiale locale $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$; c'est le théorème de Bouguer.
3. Il s'agit en fait d'un modèle pour l'atmosphère terrestre, dans laquelle l'indice optique varie depuis la valeur $n_0 = 1,0003$ au niveau du sol ($r = R = 6\,400$ km) jusqu'à la valeur exacte 1 au sommet de l'atmosphère, à l'altitude $h = 64$ km. Proposer l'expression approchée la plus simple possible pour $n(r)$.

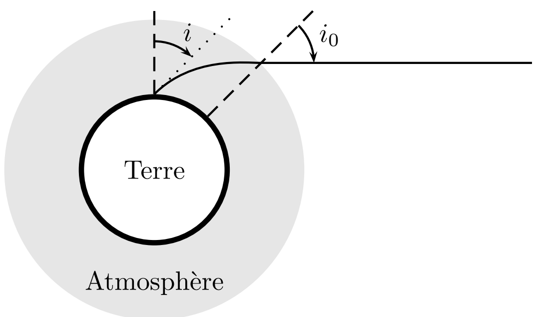

Fig. 2 – Théorème de Bouguer

4. Du fait de la variation progressive de l'indice optique, un rayon lumineux provenant de l'espace verra sa trajectoire incurvée vers le sol au cours de la descente vers l'observateur au sol (cf. figure 2).
   Lors d'une descente de r à $r + \mathrm{d}r$ ($\mathrm{d}r < 0$), évaluer le signe et la valeur de la déviation $\mathrm{d}\Delta$ subie par le rayon lumineux. On appellera i_0 l'angle d'incidence du rayon lumineux sur la couche supérieure de l'atmosphère.
5. Calculer la déviation totale Δ pour $i_0 = 60°$, ainsi que l'angle d'incidence au sol i.

Réponses : $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}\wedge n\mathbf{u}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\wedge n\mathbf{u} + \mathbf{r}\wedge\frac{\mathrm{d}(n\mathbf{u})}{\mathrm{d}s} = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}\wedge n\mathbf{u} = \mathrm{Cte}$, $n(r)r\sin i(r) = \mathrm{Cte}$, $n(r) = n_0 - \frac{n_0-1}{h}(r-R)$, $i(r+\mathrm{d}r) = i(r) + \mathrm{d}\Delta$, $n(r+\mathrm{d}r)\sin i(r+\mathrm{d}r) = n(r)\sin i(r)$, par développement limité $\mathrm{d}n\sin i + n\cos i\mathrm{d}\Delta = 0$, $\mathrm{d}\Delta = -\frac{\mathrm{d}n}{n}\frac{\sin i}{\cos i}$, loi de Bouguer $nr\sin i = (R+h)\sin i_0$ d'où : $\mathrm{d}\Delta = -\frac{\mathrm{d}n}{n}\frac{(R+h)\sin i_0}{\sqrt{n^2r^2-(R+h)^2\sin^2 i_0}}$, intégration par calculs approchés ou bien ordre de grandeur avec : $|\Delta| = \Delta n\tan i_0 \simeq 1,8'$.

B. Tracés optiques

3. Tracés de rayons

1. Compléter la marche des rayons lumineux incidents ou émergents des lentilles de la figure 3.

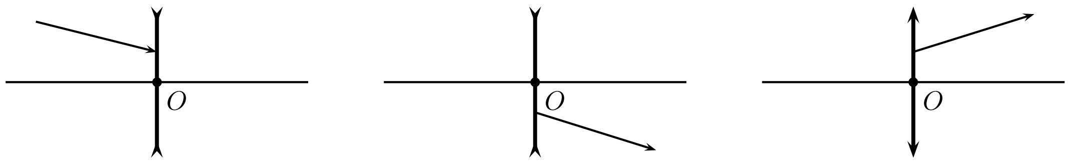

Fig. 3 – Lentilles

2. Compléter la marche des rayons lumineux incidents ou émergents des lentilles de la figure 4.

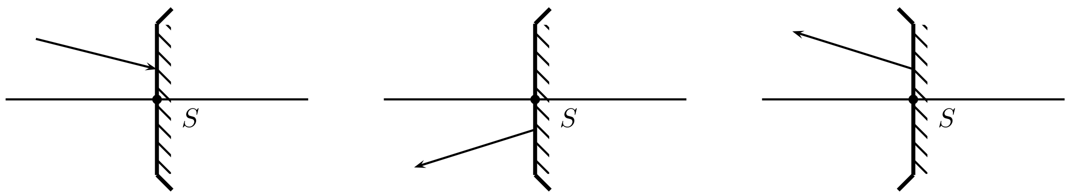

Fig. 4 – Miroirs

4. Constructions Image - Objet

Dans chaque cas, construire l'objet qui possède l'image obtenue sur la figure 5.

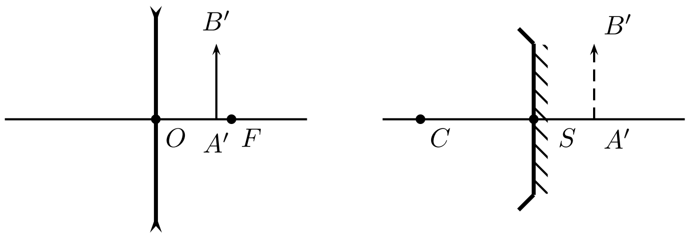

Fig. 5 – Constructions

C. Relations de conjugaison

5. Grandissement de l'image

Un système optique centré (S) donne d'un objet réel AB une image réelle $A'B'$ située sur un écran perpendiculaire à l'axe du système. On intercale une lentille entre (S) et l'écran. On obtient une image deux fois plus grande (et de même sens) sur l'écran qu'il a fallu reculer de $d = 20$ cm. Déterminer la nature de la lentille ajoutée, sa position et sa distance focale.

Réponses : Divergente à 20 cm de l'écran, de focale 20 cm.

6. Projecteur

On veut réaliser la projection sur un écran d'un document, l'écran étant situé à $3,5$ m du document, au moyen d'un seul miroir sphérique. Quel miroir faut-il choisir (concave ou convexe) ? Quel rayon faut-il lui donner si l'on veut que l'objet soit à 50 cm du miroir ?

Réponses : concave, $R = 0,89$ m.

7. Focométrie

Un système optique centré (S) donne d'un objet réel AB une image réelle $A'B'$ située sur un écran perpendiculaire à l'axe du système. On intercale une lentille entre (S) et l'écran. On obtient une image deux fois plus grande (et de même sens) sur l'écran qu'il a fallu reculer de $d = 20$ cm.
Déterminer la nature de la lentille ajoutée, sa position et sa distance focale.

8. Rétroviseur et angle de vision

Un observateur place son œil à distance D devant un miroir de diamètre d. Étant donné que la pupille a un diamètre faible, on assimile celle-ci à un point A' placé sur l'axe du miroir, à une distance inférieure à la distance focale du miroir.

1. Effectuer la construction graphique du point A, dont l'image est A' par le miroir dans les trois cas suivants : le miroir est plan, il est convexe de rayon R, il est concave de rayon R.
2. Quels sont dans les trois cas précédents, les points que l'observateur peut espérer apercevoir par réflexion dans le miroir ? Préciser la valeur de l'angle qui caractérise la portion d'espace accessible à la vision (champ du miroir).
3. Un observateur place son œil à $D = 1$ m d'un miroir plan de diamètre $d = 15$ cm. Calculer l'angle du cône de vision.
4. Le miroir est maintenant à 2 m de l'œil. Que peut-on dire du champ ? Quel miroir faut-il choisir pour retrouver le même champ qu'à la question précédente ?
5. Le rétroviseur intérieur d'une voiture est plan. Quelle est la forme du rétroviseur droit ?

D. Instruments d'optique

9. Télescope

Un télescope Cassegrain est constitué d'un miroir primaire M_1 de diamètre 1900 mm et de rayon de courbure 19000 mm qui renvoie la lumière sur un miroir secondaire M_2 de diamètre 520 mm et de rayon de courbure 7725 mm. La distance S_1S_2 entre les sommets des miroirs est égale à 6925 mm. Pour simplifier, le miroir primaire est assimilé à un miroir sphérique concave et le miroir secondaire à un miroir sphérique convexe. L'image définitive se forme en arrière du miroir primaire dans lequel a été percé une petite ouverture de diamètre 240 mm.

1. Faire un schéma de l'installation.
2. Déterminer la position de cette image.
3. On définira la distance focale du miroir par analogie avec une lentille mince en considérant l'évolution d'un rayon parallèle à l'axe optique. Que vaut-elle ?
4. Calculer le grandissement du miroir secondaire dans ces conditions d'utilisation.

10. Téléobjectif

Un objectif photographique est constitué d'une lentille convergente L_1 de centre O_1, de distance focale $f_1' = 75$ mm. La pellicule Π est placée dans le plan focal image de l'objectif. On ajoute à cet objectif deux lentilles additionnelles : une lentille L_2 divergente, de centre O_2 et de focale $f_2' = -25$ mm, que l'on accole à L_1 (on a ainsi $O_1 = O_2$) et une lentille L_3 convergente, de centre O_3 et de focale $f_3' = 100$ mm, que l'on fixe devant le système $L_1 - L_2$. La distance O_3O_1 est réglée de manière à ce que l'image d'un objet éloigné soit nette sur la pellicule.

1. Faire un schéma représentant les lentilles avec les positions relatives des centres et des foyers. Compléter ce schéma par un tracé de rayons définissant la position du foyer image F' du téléobjectif constitué par les trois lentilles.
2. Calculer l'encombrement de cet appareil, c'est à dire la distance du centre O_3 à la pellicule Π.
3. Calculer la grandeur $A'B'$ d'une tour AB de 60 m de hauteur, située à une distance $d = 3$ km de l'objectif.
4. Calculer l'encombrement d'un appareil qui aurait comme objectif, une seule lentille donnant une image de même grandeur. Conclusion.

Réponses : focale équivalente $f' = -37,5$ mm, $\frac{1}{\overline{O\Pi}} - \frac{1}{\overline{O_1F_3'}} = \frac{1}{f'}$ et $\overline{O\Pi} = 75$ mm, $\overline{O_1F_3'} = 25$ mm, $\overline{O_3O_1} = 75$ mm, $\overline{A'B'} = \overline{AB}\frac{f_3'}{-d} = -2$ mm, $\overline{A''B''} = -6$ mm, pour avoir une telle taille avec une seule lentille : $f = 300$ mm, deux fois plus encombrant.

11. Microscope

Un microscope est constitué par association de deux lentilles convergentes jouant respectivement les rôles d'objectif et d'oculaire. L'objectif est de focale $f_1' = 5$ mm et l'oculaire de focale $f_2' = 25$ mm. Le foyer image F_1' de l'objectif et le foyer objet F_2 de l'oculaire sont écartés de $l = 25$ cm.

1. Un observateur, l'œil placé au foyer image de l'oculaire, étudie un petit objet AB disposé dans un plan de front, le point A étant situé sur l'axe optique. Où doit être A pour que l'œil effectue l'observation sans accommoder ?
2. Représenter la marche d'un pinceau lumineux étroit issu du point B.
3. Soient α' l'angle sous lequel l'œil voit l'image définitive de AB à travers le microscope et α l'angle sous lequel il apercevrait AB sans instrument. Calculer le grossissement $G = \alpha'/\alpha$.
4. En accommodant, l'œil peut observer nettement un objet situé à une distance comprise entre 25 cm (Punctum Proximum) et l'infini (Punctum Remotum). De combien peut-on modifier la distance entre l'objectif et l'oculaire si l'on veut toujours pouvoir observer nettement l'objet AB (cette distance s'appelle la latitude de mise au point) ?

12. Lunette astronomique

Une lunette astronomique est un système centré qui se compose d'un objectif assimilable à une lentille mince convergente L_1 de focale $f_{ob} = 100$ cm, de centre optique O_1, de diamètre $D = 10$ cm ainsi que d'un oculaire que l'on peut assimiler à une lentille mince convergente L_2 de focale $f_{oc} = 5$ cm, de centre optique O_2 et de diamètre $d = 1,5$ cm.

1. Calculer la distance $e = \overline{O_1O_2}$ entre les centres optiques des lentilles pour que le système soit afocal :

   $a)e = 95$ cm $b)e = 20$ cm $c)e = 105$ cm $d)e = 55$ cm

2. Un objet situé à l'infini présente un diamètre angulaire θ lorsqu'il est observé sans instrument par un œil normal et un diamètre angulaire θ' lorsqu'il est observé à travers l'instrument. Calculer le grossissement $G = \theta'/\theta$ de la lunette :

   $a)G = -f_{ob}/f_{oc}$ $b)G = f_{ob}/f_{oc}$ $c)G = -(f_{ob} + f_{oc})/f_{oc}$ $d)G = (f_{ob} + f_{oc})/f_{oc}$

3. On observe un objet ponctuel à l'infini sur l'axe optique de la lunette. Quelle devrait être la valeur minimale du diamètre d_m de la monture de l'oculaire pour que tous les rayons qui traversent la monture de l'objectif ressortent de l'instrument ? On s'aidera avantageusement d'un schéma :

   $a)d_m = 2,5$ mm $b)d_m = 3,5$ mm $c)d_m = 1,5$ mm $d)d_m = 5,0$ mm

4. On appelle diaphragme d'ouverture, le diaphragme qui limite le faisceau de rayons qui traverse l'instrument pour la formation de l'image. Donner son diamètre d_0 :

   $a)d_0 = 1,5$ cm $b)d_0 = 10$ cm $c)d_0 = 0,5$ cm $d)d_0 = 11,5$ cm

5. On appelle pupille de sortie, le conjugué du diaphragme d'ouverture par rapport à la lunette. Calculer la position $\overline{O_2P}$ du centre P de la pupille de sortie par rapport au centre optique O_2 de la lentille oculaire :

   $a)\overline{O_2P} = 1,2$ cm $b)\overline{O_2P} = 3,75$ cm $c)\overline{O_2P} = 1,75$ cm $d)\overline{O_2P} = 5,25$ cm

6. Déterminer son diamètre d_p :

   $a)d_p = 5$ mm $b)d_p = 3,5$ mm $c)d_p = 2,5$ mm $d)d_p = 1,5$ mm

7. La lunette étudiée précédemment donne une image renversée de l'objet visé. Pour observer des objets terrestres, on redresse cette image en insérant entre les deux lentilles minces convergentes, une lentille mince convergente L_3, de centre optique O_3 et de focale $f_3 = 2$ cm. L'oculaire L_2 est alors déplacé pour que la lunette terrestre reste afocale. Déterminer la position de la lentille L_3, par rapport à la lentille L_1, pour qu'elle donne de l'image $\overline{A_1B_1}$ fournie par l'objectif L_1 d'un objet à l'infini, une image $\overline{A_3B_3}$ réelle, renversée et trois fois plus grande que $\overline{A_1B_1}$:

   $a)\overline{O_1O_3} = 63,32$ cm $b)\overline{O_1O_3} = 102,67$ cm $c)\overline{O_1O_3} = 47,25$ cm $d)\overline{O_1O_3} = 75,12$ cm

8. En déduire la nouvelle longueur e' de la lunette :

   $a)e' = 132,75$ cm $b)e' = 165,25$ cm $c)e' = 152,12$ cm $d)e' = 115,67$ cm

9. Calculer le nouveau grossissement G' de la lunette :

   $a)G' = 60$ $b)G' = 100$ $c)G' = 50$ $d)G' = 95$