Exercices : 05 - Ondes électromagnétiques

A. Structure de l'onde

1. Caractérisation d'une OPPS

Une onde progressive plane monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m, se propage dans le vide. A tout instant t, son vecteur champ électrique complexe $\mathbf{E}$ au point $P(x, y, z)$ a pour composantes cartésiennes E_x, E_y, E_z avec :

$$E_z = 0 \qquad E_x = E_0 \exp(j\Phi) \qquad \text{où} \qquad \Phi = \frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t$$

On a de plus $E_0 = 10^{-4}\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

1. Calculer la fréquence de l'onde :

$$a)N = 10^{21}\ \mathrm{Hz} \quad b)N = 3 \times 10^{17}\ \mathrm{Hz} \quad c)N = 5 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz} \quad d)N = 2 \times 10^{7}\ \mathrm{Hz}$$

2. Cette fréquence appartient-elle au domaine :

$$a)\text{industriel} \quad b)\text{radioélectrique} \quad c)\text{optique} \quad d)\text{gamma}$$

3. Calculer la valeur numérique de k :

$$a)k = 1,047 \times 10^{7}\ \mathrm{m}^{-1} \quad b)k = 2 \times 10^{5}\ \mathrm{m}^{-1} \quad c)k = 3,092 \times 10^{3}\ \mathrm{m}^{-1} \quad d)k = 0,573 \times 10^{2}\ \mathrm{m}^{-1}$$

4. Indiquer l'équation cartésienne des plans d'onde :

$$a)2x + 2y + z = Cte \quad b)x + y = Cte \quad c)z = Cte \quad d)x + y + 2z = Cte$$

5. Établir l'expression de E_y en fonction de E_x et indiquer leur relation de phase :

$$a)E_y = E_x/3 \quad b)E_y = -E_x \quad c)\text{phase} \quad d)\text{opposition de phase}$$

6. Calculer en fonction de E_x les trois composantes du vecteur champ magnétique de l'onde :

$$a)(E_x/2c; E_x/2c; E_x/c) \quad b)(E_x/3c; E_x/3c; -4E_x/3c)$$
$$c)(E_x/2c; E_x/2c; -2E_x/c) \quad d)(2E_x/3c; 2E_x/3c; E_x/3c)$$

7. Calculer en fonction de Φ la densité d'énergie électromagnétique au point P à la date t :

$$a)u = \varepsilon_0 E_0^2 \cos 2\Phi \quad b)u = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin 2\Phi \quad c)u = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \Phi \quad d)u = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \Phi$$

8. Calculer sa valeur moyenne sur une période en électronvolt (eV) par m^3 :

$$a) < u >_t = 0,55\mathrm{eV} \cdot\ \mathrm{m}^{-3} \quad b) < u >_t = 2\mathrm{eV} \cdot\ \mathrm{m}^{-3}$$
$$c) < u >_t = 5\mathrm{eV} \cdot\ \mathrm{m}^{-3} \quad d) < u >_t = 0,02\mathrm{eV} \cdot\ \mathrm{m}^{-3}$$

9. Calculer en fonction de Φ les composantes du vecteur de Poynting $\mathbf{R}$ de l'onde :

$$a)(\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/2; \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/2; \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi)$$
$$b)(\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/2; \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/2; -2\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi)$$
$$c)(4\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/3; 4\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/3; 2\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/3)$$
$$d)(4\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/3; 4\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/3; 2\varepsilon_0 c E_0^2 \cos \Phi \sin \Phi/3)$$

10. Calculer les valeurs numériques de la période T_R et de la valeur moyenne $< ||\mathbf{R}|| >_t$:

$$a)T_R = 5 \times 10^{-20}\ \mathrm{s} \quad b)T_R = 10^{-15}\ \mathrm{s}$$
$$c) < ||\mathbf{R}|| >_t = 1,32 \times 10^{-8}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \quad d) < ||\mathbf{R}|| >_t = 2,65 \times 10^{-11}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$$

2. Onde LASER

Un faisceau laser émet une onde plane monochromatique polarisée rectilignement qui se propage dans le plan Oxy suivant une direction Ox' inclinée de 60 $^\circ$ par rapport à l'axe Ox.

1. Écrire les composantes du vecteur d'onde, du champ électrique, du champ magnétique et du vecteur de Poynting.
2. Calculer leurs normes dans le cas d'un laser à argon ionisé ($\lambda = 488$ nm) qui émet en continu un faisceau cylindrique de 1 mm^2 de section, de puissance moyenne 1 W.
3. Quelle est l'énergie électromagnétique localisée en moyenne dans un tranche d'espace plane perpendiculaire à Ox', d'épaisseur dx' et de surface S ? Quelle est l'énergie rayonnée en moyenne à travers la surface S pendant le temps dt ? En déduire la vitesse à laquelle se propage l'énergie électromagnétique moyenne.

B. Ondes dans le vide

3. Ondes stationnaires

Un dispositif non précisé assure dans le demi-espace $x < 0$ la propagation le long de l'axe Ox, dans le vide, d'une onde :

$$\mathbf{E} = E_0 \exp -i\omega(\frac{x}{c} - t)\mathbf{e}_y$$

A partir du point O, un certain dispositif réfléchissant superpose à l'onde précédente dans le même demi-espace une onde de même direction, se propageant en sens inverse, d'amplitude $-E_0$ et de même pulsation :

$$\mathbf{E} = -E_0 \exp -i\omega(\frac{x}{c} + t)\mathbf{e}_y$$

1. Déterminer le champ électrique de l'onde totale.
2. Déterminer le champ magnétique correspondant ; on utilisera l'équation de Maxwell-Faraday.
3. Justifier le terme d'onde stationnaire et préciser les lieux des nœuds et des ventres du champ électrique et du champ magnétique.

4. Biprisme

Un biprisme d'angle au sommet A et d'indice optique n dévie vers sa base une onde électromagnétique monochromatique plane progressive, de pulsation ω, d'amplitude E_0 d'un angle θ (cf. figure 1) où on admet que $\sin(A + \theta) = n \sin A$. L'angle A est petit.

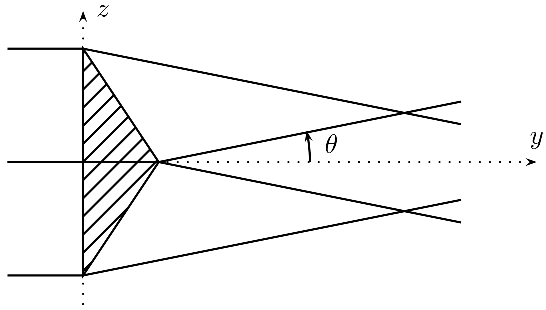

Fig. 1 – Biprisme

On considère que le champ électrique de chacune des deux ondes considérées est en permanence perpendiculaire au plan de figure.

1. Déterminer les champs électrique et magnétique complexes de l'onde issue du prisme supérieur.
2. Déterminer de même les champs de l'onde issue du prisme inférieur.
3. Déterminer les expressions de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{B}$ dans la zone de superposition des ondes.
4. Déterminer le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie en tout point du champ d'interférence. On s'intéressera en particulier à ce qu'on peut observer sur l'écran, perpendiculaire à l'axe (Oy) et situé dans le champ d'interférences.
5. En déduire la relation entre l'interfrange i (période spatiale de variation de l'énergie transportée), l'angle θ et la longueur d'onde λ de la lumière.

Réponses : $\theta \simeq (n-1)A$, $\mathbf{E}_1 = E_0\mathbf{e}_x \exp j(\omega t - \frac{2\pi \cos\theta}{\lambda} y + \frac{2\pi \sin\theta}{\lambda} z)$,
$\mathbf{B}_1 = -\frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - \frac{2\pi\cos\theta}{\lambda} y + \frac{2\pi\sin\theta}{\lambda} z)[\sin\theta \mathbf{e}_y + \cos\theta \mathbf{e}_z]$, pour $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{B}_2$ changer θ en $-\theta$,
$\mathbf{E} = 2E_0\mathbf{e}_x \exp j\omega t \exp -j\frac{2\pi y\cos\theta}{\lambda} \cos\frac{2\pi z\sin\theta}{\lambda}$,
$\mathbf{B} = \frac{2E_0}{c} \exp j\omega t \exp -j\frac{2\pi y \cos\theta}{\lambda}[\exp -j\frac{\pi}{2} \sin\theta \sin\frac{2\pi z\sin\theta}{\lambda}\mathbf{e}_y - \cos\theta\cos\frac{2\pi z\sin\theta}{\lambda}\mathbf{e}_z]$,
$\mathbf{\Pi} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c}[\frac{1}{4}\sin 2(\omega t - \frac{2\pi y\cos\theta}{\lambda})\sin\theta\sin\frac{4\pi z\sin\theta}{\lambda}\mathbf{e}_z + \cos^2(\omega t - \frac{2\pi y \cos\theta}{\lambda})\cos\theta\cos^2\frac{2\pi z\sin\theta}{\lambda}\mathbf{e}_y]$,

$< \mathbf{\Pi} >_t = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos\theta (1 + \cos \frac{2\pi 2 \sin\theta z}{\lambda}) \mathbf{e}_y$, fonction d'interférences d'interfrange $i = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$.

5. Réseau par réflexion

Un conducteur parfait est séparé du vide par une surface d'équation $y = f(x)$, où f est périodique de période a. L'espace $y > f(x)$ est le vide, l'espace $y < f(x)$ est le métal (cf. fig. 2).

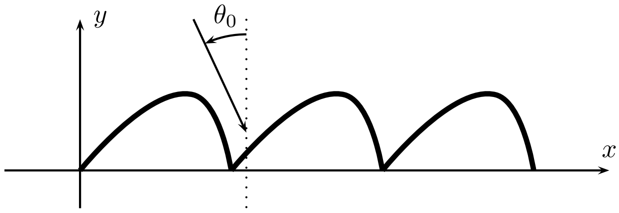

Fig. 2 – Réseau par réflexion

On envoie depuis le vide vers le métal une onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée selon (Oz), de champ électrique $\mathbf{E}_i = E_0 \mathbf{e}_z \exp\left[i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)\right]$, dont la direction de propagation fait l'angle θ_0 avec (Oy). On observe la formation d'une onde réfléchie ; cependant, la période a de $f(x)$ n'étant pas forcément petite devant la longueur d'onde λ de l'onde lumineuse, l'onde réfléchie ne vérifie pas forcément les lois de Descartes, et on la notera $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}(x,y,z) \exp(i\omega t)$.

1. Quelle doit être la direction de $\mathbf{E}_r$? Montrer que $\mathbf{E}(x,y,z)$ ne dépend pas de z. Établir une équation aux dérivées partielles pour $\mathbf{E}(x,y)$.
2. Établir une relation entre $\mathbf{E}(x, f(x))$, $\mathbf{E}(x+a, f(x))$, k, ω, θ_0 et a.
3. On cherche une solution de la forme $E(x,y) = A \exp\left[i\left(\alpha x + \beta y\right)\right]$. Établir une relation liant α, β et k, puis une autre relation liant α, k, θ_0 et un entier n.
   Commenter.

Réponses : $\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{0}$ donc $\mathbf{E}_r$ selon $\mathbf{e}_z$, $\mathrm{div}\,(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) = 0$ impose $\mathrm{div}\,\mathbf{E}_r = 0$ d'où $\frac{\partial \mathbf{E}(x,y,z)}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}$; $\mathbf{E}(x+a, f(x)) = \mathbf{E}(x, f(x)) \exp -ika\sin\theta_0$; $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$, $\alpha = -k\sin\theta_0 + n\frac{2\pi}{a}$, $\mathbf{k}_r = \alpha \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y$, $sin\theta_r = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\alpha}{k}$ d'où $a(\sin\theta_r + \sin\theta_0) = n\lambda$ relation de Bragg.

C. Ondes dans les milieux matériels

6. Communications sous-marines

Le plan (xOy) horizontal sépare l'air, assimilé au vide, situé au dessus de ce plan, et de l'eau, assimilée à un milieu légèrement conducteur, de conductivité γ, de permittivité relative ϵ_r : on remplace dans les équations de Maxwell ε_0 par $\varepsilon_0 \epsilon_r$.
Au voisinage de l'interface entre l'eau et l'air, on envisage la propagation d'une onde électromagnétique plane dont le champ électrique vérifie $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x \exp\left[i\left(\omega t - ky - \lambda z\right)\right]$ dans le vide, et $\mathbf{E}' = E'_0 \mathbf{e}_x \exp\left[i\left(\omega' t - k' y - \lambda' z\right)\right]$ dans l'eau.

1. Exprimer les relations vérifiées par k, λ, ω (respectivement k', λ', ω') et les constantes de l'énoncé. On notera c_0 la célérité de la lumière dans le vide.
2. Exprimer les relations vérifiées à l'interface des deux milieux.
3. L'onde incidente provient de l'air à grande distance et arrive vers la surface sous l'incidence θ à la fréquence 100 kHz. Peut-on évaluer la profondeur de pénétration de cette onde dans l'eau ? On prendra $\gamma = 5~\mathrm{S\cdot m^{-1}}$, $\epsilon_r = 80$. Quelle est l'influence de θ ?
4. Comment choisir la fréquence d'une onde électromagnétique pour communiquer avec un sous-marin en plongée ? Quel inconvénient présente ce choix ?
5. On se place maintenant dans le cas de l'incidence normale, $\theta = 0$. Calculer la puissance cédée par unité de surface à l'eau de mer pour une onde de fréquence 100 kHz de champ électrique efficace $10^{-3}~\mathrm{V\cdot m^{-1}}$.
   Commenter.

Réponses : $k^2 + \lambda^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$, $k'^2 + \lambda'^2 = \epsilon_r \frac{\omega'^2}{c_0^2} - j\mu_0\gamma\omega'$, avec l'onde réfléchie et la continuité en $z = 0$: $E_0 \exp\left[i\left(\omega t - ky\right)\right] + E''_0 \exp\left[i\left(\omega t - ky\right)\right] = E'_0 \exp\left[i\left(\omega t - k'y\right)\right]$ vraie $\forall y$, $\forall t$, $k = k'$ et $\omega = \omega'$; $\lambda = \frac{\omega}{c_0}\cos\theta$, $k = \frac{\omega}{c_0}\sin\theta$, $\lambda'^2 = (\epsilon_r - 1 + \cos^2\theta)\frac{\omega^2}{c_0^2} - i\mu_0\gamma\omega$, profondeur de l'ordre de $\delta = \frac{1}{|\lambda'|}$, $\delta \simeq \frac{c_0}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}\frac{1}{(1+\frac{\gamma^2}{\epsilon_r^2\varepsilon_0^2\omega^2})^{1/4}}$, $\delta \simeq 0,5$ m, si θ faible, $\cos^2\theta$ élevé, $|\lambda'|$ élevé plus la profondeur est faible ; $\delta \simeq \frac{c_0}{\sqrt{\omega}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\gamma}}$, f faible mais alors la longueur d'onde est grande donc grande antenne impossible ; $B'_0 = E'_0 \frac{|\lambda'|}{\omega}$, avec $E_0 + E''_0 = E'_0$ et la continuité de $\mathbf{B}$: $\frac{E_0 - E''_0}{c_0} = \frac{E'_0|\lambda'|}{\omega}$, on évalue le module du vecteur de Poynting $\Pi = \frac{1}{\mu_0} \frac{4E_0^2|\lambda'|}{(1+\frac{c_0|\lambda'|}{\omega})^2\omega} \simeq 10^{-11}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

7. Ionosphère

La haute atmosphère de la Terre est partiellement ionisée (dans la zone dite ionosphère) et se présente sous forme d'ions positifs et d'électrons, à raison de $n = 10^{12}\ \mathrm{m^{-3}}$ électrons par unité de volume.

1. Montrer que la conduction ionique est négligeable devant la conduction électronique. Pour cela, on établira l'expression de la vitesse et de la conductivité correspondant aux ions et aux électrons. On montrera qu'on peut négliger les forces magnétiques devant les forces électriques, si le plasma est peu dense.

   On considère la propagation d'ondes planes :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0} \exp i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B_0} \exp i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

2. Déterminer l'équation de dispersion pour la propagation d'une onde plane dans ce milieu.
3. Déterminer la vitesse de phase, la vitesse de groupe et la fréquence de coupure f_0 de l'onde.
4. A.N. : Déterminer la fréquence de coupure, déterminer l'écart relatif entre la vitesse de groupe de l'onde et la vitesse correspondante dans le vide, pour une onde de fréquence égale à 100 MHz.
5. On suppose $f > f_0$. Calculer le vecteur de Poynting moyen. On fera l'hypothèse d'une vibration rectiligne.
6. Déterminer aussi la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique u. Déterminer enfin la densité volumique moyenne d'énergie cinétique des électrons e_c.
7. Comparer vitesse de l'énergie et vitesse de groupe.