

## Devoir surveillé de Sciences Physiques n°4 du 24-11-2007

— Durée : 4 heures —

### Problème n° 1 – Couleurs par diffraction

Centrale PC 2007

#### A. Généralités

On envisage un réseau par transmission constitué d'une surface plane ne laissant pas passer la lumière et percée de  $N$  fentes parallèles de largeur  $e$  et de longueur  $L$  régulièrement espacées. Elles forment ainsi un motif répété périodiquement de période  $a$ . On considère que  $L \gg e$  et que  $L$  est très grand devant les longueurs d'ondes  $\lambda$  du domaine visible. L'indice de l'air est pris égal à 1. Voir la figure 1.

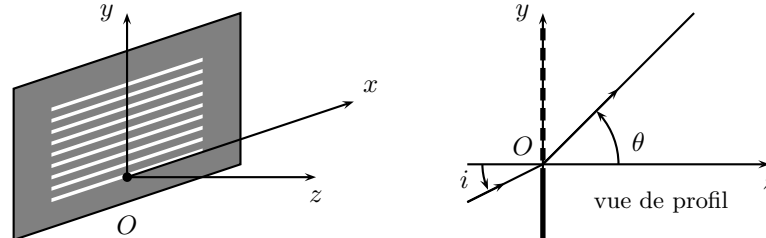


FIG. 1 – Réseau par transmission

1. Seuls des faisceaux lumineux parallèles sont envisagés. La direction de la lumière incidente est contenue dans le plan  $yOz$ . Pourquoi peut-on considérer que la direction de la lumière diffractée est également contenue dans ce plan ?

2. On note  $\underline{a}_0(i, \theta, e, \lambda)$  l'amplitude diffractée par la première fente (0) dans la direction  $\theta$ . Justifier que l'amplitude diffractée dans la même direction par la fente (1) ne diffère de  $\underline{a}_0$  que par l'ajout d'une phase supplémentaire  $\varphi$  que l'on déterminera en fonction de  $i, \theta, a$  et  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière incidente.

3. On admet que l'amplitude diffractée par le réseau peut s'écrire comme le produit de l'amplitude diffractée par un motif unique (la fente (0) par exemple) et d'un terme d'interférence à  $N$  ondes, noté  $\mathcal{A}(N, \varphi)$  indépendant de la nature des motifs. Montrer que l'intensité diffractée dans la direction  $\theta$  par les  $N$  fentes peut s'écrire sous la forme  $|\underline{a}_0|^2 I(N, \varphi)$ . Exprimer  $I(N, \varphi)$  en fonction de  $\mathcal{A}(N, \varphi)$ . À quelle(s) condition(s) portant sur  $e$  peut-on considérer  $\underline{a}_0$  comme indépendante de  $\theta$  et  $i$  ? On se placera désormais dans ce cas.

4. On donne l'allure de la courbe  $I(N, \varphi)$  en fonction du déphasage  $\varphi$  sur la figure 2. Pour quelles valeurs de  $\theta$  l'intensité diffractée est-elle maximale lorsque  $N$  devient grand ?

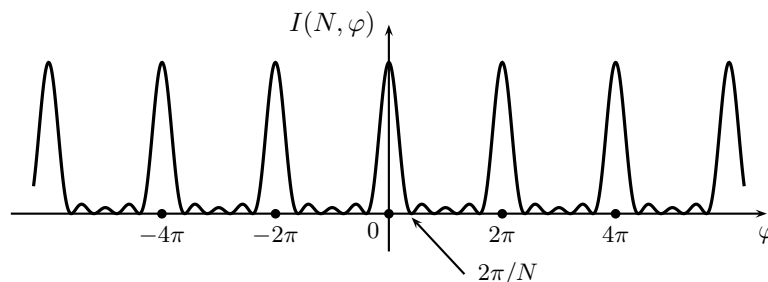


FIG. 2 – Intensité  $I(N, \varphi)$  diffractée par le réseau

5. La surface d'un disque compact est modélisé par un ensemble de miroirs parallèles identiques aux fentes précédentes, voir la figure 3. Montrer que le résultat précédent reste valable à condition de remplacer  $\varphi$  par une phase  $\varphi'(i, \theta', a, \lambda)$  à déterminer.

6. Pour un disque compact,  $a = 1,6 \mu\text{m}$ . Le disque est désormais éclairé en incidence normale. Proposer un dispositif expérimental permettant d'observer la lumière diffractée dans les conditions décrites précédemment.

7. Y-a-t-il mélange des ordres en lumière blanche ?

8. Peut-on voir son propre reflet dans un disque compact comme dans un miroir ? Les couleurs sont-elles modifiées ?

#### B. Couleurs du paon

Les barbules des plumes de paon contiennent des bâtonnets de mélanine (pigment brun foncé qui donne sa coloration à la peau) opaques noyés dans de la kératine (protéine fibreuse transparente d'indice  $n = 1,5$ ). Chaque bâtonnet constitue un obstacle qui diffracte la lumière (comme les miroirs précédents). Les bâtonnets

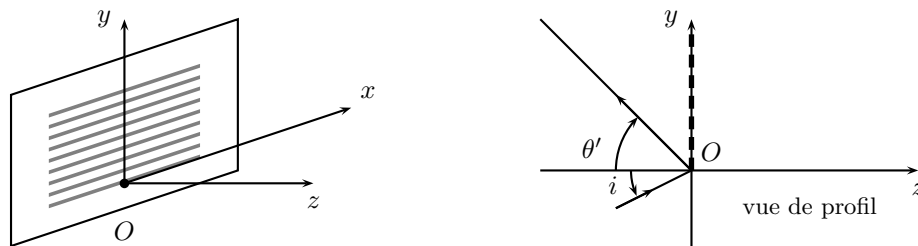


FIG. 3 – Réseau par réflexion

sont régulièrement répartis dans la kératine au niveau des nœuds d'un réseau cubique simple ( $N_x$  bâtonnets dans la direction  $x$ ,  $N_y$  dans la direction  $y$  et  $N_z$  dans la direction  $z$ ). Comme précédemment, seuls les rayons contenus dans le plan  $yOz$  sont pris en compte. On suppose l'amplitude diffractée indépendante de  $N_x$  : tout se passe comme si les bâtonnets avaient une longueur  $L$  dans la direction  $x$  très supérieure à  $a$  et  $\lambda$ . On note  $a_1$  l'amplitude (supposée constante) diffractée par un unique bâtonnet. On s'intéresse à la lumière diffractée par chaque bâtonnet dans la direction  $r' = -r$  de la réflexion spéculaire, voir la figure 4.

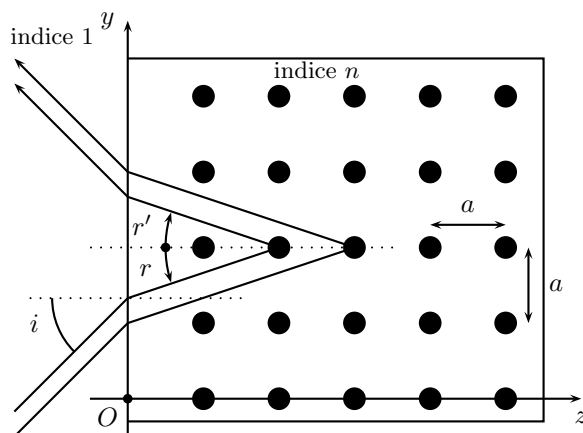


FIG. 4 – Modèle de la kératine

9. Soit  $\varphi_y$  le déphasage entre les ondes diffractées par deux bâtonnets plus proches voisins dans la direction  $y$  et de même coordonnée  $z$  : bâtonnets  $(i, j)$  et  $(i + 1, j)$ . De même,  $\varphi_z$  est le déphasage entre les ondes diffractées par deux bâtonnets plus proches voisins dans la direction  $z$  et de même coordonnée  $y$  : bâtonnets  $(i, j)$  et  $(i, j + 1)$ . En utilisant le résultat donné à la question 2, montrer que l'intensité diffractée est proportionnelle à  $|a_1^2| I(N_y, \varphi_y) I(N_z, \varphi_z)$ .

10. En s'inspirant des questions 2 et 5, exprimer  $\varphi_z$  et  $\varphi_y$  en fonction de  $n, a, \lambda$  et  $i$ .

11.  $N_y$  et  $N_z$  sont très grands devant 1. Dans quelle(s) direction(s)  $i$  la longueur d'onde  $\lambda$  est-elle préférentiellement diffractée ?

12. Pour quelle valeur minimale de  $a$  toutes les longueurs d'onde du spectre visible sont-elles diffractées ? Faire l'application numérique.

13. On se place en incidence normale  $i = 0$ . Que valent alors  $\varphi_z$  et  $\varphi_y$  ? En observant les taches colorées des plumes de paon, on peut voir un centre bleu-noir (bâtonnets distants de  $0,16 \mu\text{m}$ ) entouré d'une tache ovale turquoise (bâtonnets séparés de  $0,17 \mu\text{m}$ ) ceinte d'une couronne extérieure brun-rouge (bâtonnets séparés de  $0,21 \mu\text{m}$ ). Interpréter ces différentes teintes.

### Problème n° 2 – Hydrates de gaz et climatisation

Mines PSI 2007

Pour répondre aux exigences du protocole de Kyoto et de Montréal sur les changements climatiques et sur la protection de la couche d'ozone, le marché de la réfrigération utilise progressivement des fluides frigoporteurs diphasiques. Ces fluides exploitent l'énergie de changement de phase solide-liquide ( $300 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  pour la glace). Pour la climatisation, il est nécessaire de disposer de composés dont la température de transition de phase soit voisine de  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ . Des cristaux similaires à la glace, les hydrates se révèlent être intéressants pour ce but. Ce sont des structures tridimensionnelles, en forme de cage susceptibles d'accueillir des molécules ou des sels.

#### A. Généralités sur les hydrates

##### Interaction de Van der Waals

L'interaction entre les molécules d'eau et l'espèce piégée est du type VAN DER WAALS. La figure 5 montre un dipôle électrostatique  $\mathbf{p}_a$  modélisé par deux charges ponctuelles  $\pm q$  distantes de  $a$ . L'expression du champ

électrique produit par ce dipôle en un point  $M$  de son axe très éloigné de l'origine ( $x \gg a$ ) est  $\mathbf{E}_x = \frac{p_a}{4\pi\epsilon_0 x^3} \mathbf{e}_x$ , où  $p_a = qa$ . Une structure moléculaire neutre  $\Sigma$  placée en  $M$  acquiert le moment dipolaire  $\mathbf{p}_i = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}_x$  où la constante  $\alpha$  est nommée polarisabilité.

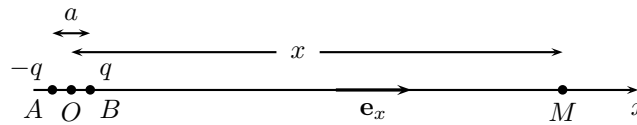


FIG. 5 – Dipôle électrostatique

1. Quelle est la dimension de  $\alpha$  ?
2. La force subie par un dipôle électrostatique de moment dipolaire  $\mathbf{p}$  plongé dans un champ électrostatique extérieur  $\mathbf{E}$  est donnée par :  $\mathbf{F} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{E}$ . Dans le cas du dipôle décrit ci-dessus, on obtient :

$$\mathbf{F} = F \mathbf{e}_x = p \frac{\partial E_x}{\partial x} \mathbf{e}_x$$

Donner l'expression de la force subie par la structure moléculaire  $\Sigma$  en fonction entre autre de  $p_a$  et de  $x$ . Justifier du fait que l'on parle ici de force attractive à courte portée.

### Capacité de stockage

Les hydrates cristallisent dans plusieurs types de structures. Deux d'entre elles, nommées I et II appartiennent au système cubique. Chaque structure présente deux types de cavités, la grande et la petite. Quelques données structurales sont présentées dans le tableau qui suit. Par exemple, la structure I comporte 8 cavités dans le volume  $a_I^3$  et la structure II comporte 24 cavités dans le volume  $a_{II}^3$ . L'expérience indique que le rayon d'une cavité occupée est, en moyenne, inférieure de  $140 \text{ pm} = 140 \times 10^{-12} \text{ m}$  à celui de la même cavité vide. On note  $y_{dd}$  le rapport du rayon de la molécule piégée à celui de la cavité occupée. Lorsque la cavité est occupée par une molécule plus encombrante, son rayon peut être augmenté. On constate aussi que seuls les hydrates vérifiant l'inégalité  $y_{dd} > 0,76$  sont stables.

Structure	Cubique I	Cubique II
Arête du cube en pm	$a_I = 1200$	$a_{II} = 1730$
Nombre de $\text{H}_2\text{O}$ par maille	46	136
Rayon de la cavité en pm	Petite 395, Grande 433	Petite 391, Grande 473
Nombre de cavités par maille	Petite 2, Grande 6	Petite 16, Grande 8

3. Expliquer, qualitativement les deux faits expérimentaux mentionnés ci-dessus.
4. Vérifier que, pour une structure de type I et une petite cavité,  $y_{dd} = 1,00$  pour le dioxyde de carbone; le rayon de la molécule de  $\text{CO}_2$  est de  $255 \text{ pm}$ .
5. Le rayon de la molécule d'hélium est de  $114 \text{ pm}$ . L'hélium peut-il être piégé dans l'une ou l'autre des deux structures cubiques ?
6. Un hydrate naturel est constitué dans des proportions variées des structures I et II. Montrer que la proportion des structures n'a pas d'influence sur la capacité de stockage.
7. Calculer le volume de méthane gazeux libérable par  $1 \text{ m}^3$  d'hydrate à la température de  $20^\circ \text{C}$ , sous la pression de  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ . On supposera que le méthane est un gaz parfait. Avec les notations usuelles,  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Le résultat est compris entre  $150$  et  $200 \text{ m}^3$ .
8. Les hydrates de méthane des fonds océaniques sont réputés contenir deux fois plus d'équivalent carbone que la totalité des gisements de combustibles fossiles connus dans le Monde. On pense qu'une élévation de  $2^\circ \text{C}$  de la température des profondeurs déstabiliserait les hydrates de méthane et entraînerait une remontée des gaz vers la surface de la Terre. Quelle pourrait être une conséquence de ce phénomène ?

### B. Climatization

Une façon d'améliorer les systèmes de climatisation consiste en l'utilisation des heures creuses de demande énergétique. Cela implique de pouvoir *stocker du froid*. Le fluide qui permet ce stockage est un fluide diphasique, constitué par un mélange fluide d'eau et d'hydrates d'un sel que l'on nommera TBAB pour les besoins de la cause. Un tel mélange porte le nom de coulis. Le système de climatisation comprend ainsi deux fluides caloporteurs. Le fluide primaire est le butane, le fluide secondaire est le TBAB. La figure 6 représente le circuit primaire et fournit plusieurs données importantes et non reprises dans le texte. Le climatiseur fonctionne avec un fluide (ici le butane) dont la température maximale est  $52^\circ \text{C}$  et la température minimale  $5^\circ \text{C}$ .

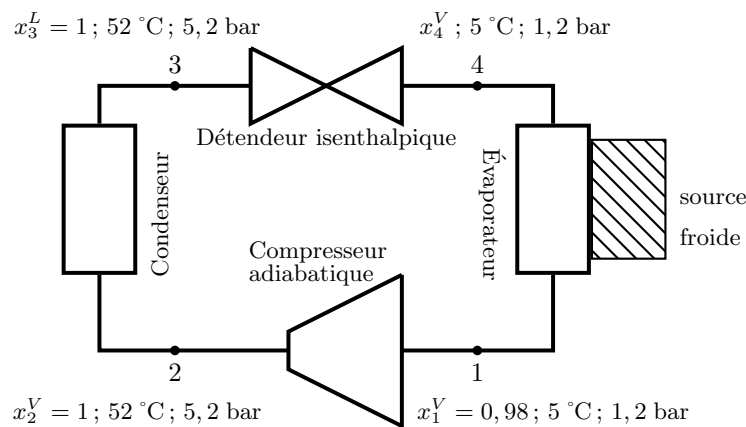


FIG. 6 – Circuit primaire

L'évaporateur est en contact thermique avec la source froide. Dans un système classique, cette source serait la pièce à climatiser. Le condenseur est en contact avec la source chaude, ici l'air extérieur à  $35\text{ }^\circ\text{C}$ . Le fluide primaire est du butane  $C_4H_{10}$ , la fraction massique de la vapeur dans l'état  $i$  est notée  $x_i^V$  ( $i = 1$  ou  $4$  sur la figure 6). Le régime de l'écoulement est indépendant du temps. Pour les applications numériques, on utilisera les enthalpies massiques :

- Enthalpie massique du liquide saturant à  $5\text{ }^\circ\text{C}$  :  $h_5^L = 11\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
  - Enthalpie massique du liquide saturant à  $52\text{ }^\circ\text{C}$  :  $h_{52}^L = 126\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
  - Enthalpie massique de la vapeur saturante à  $5\text{ }^\circ\text{C}$  :  $h_5^V = 394\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
  - Enthalpie massique de la vapeur saturante à  $52\text{ }^\circ\text{C}$  :  $h_{52}^V = 462\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- La pression critique est  $P_c = 38\text{ bar}$ , la température critique  $t_c = 152\text{ }^\circ\text{C}$ .

### Étude du circuit primaire

9. Considérant la transformation  $3 \rightarrow 4$  qui est isenthalpique, montrer que  $x_4^V = 0,30$ .

10. Tracer le diagramme Pression-Volume massique d'un fluide pour une transition de phase liquide-vapeur. Décrire les différents domaines. Y placer deux isothermes, l'une à  $t > t_c$  et l'autre à  $t < t_c$ . Sur un nouveau diagramme, représenter le cycle réalisé par le butane en plaçant les points correspondants aux états 1, 2, 3 et 4. Le cycle est-il moteur ou résistant ?

11. Exprimer et calculer  $q_f$ , le transfert thermique massique avec le système à refroidir (source froide).

12. Justifier le fait que le travail massique de compression est  $w = \Delta h_{12}$ . Calculer  $w$ .

13. Exprimer et calculer l'efficacité  $e$  du système, en fonction de  $w$  et de  $q_f$ . Comparer cette efficacité à celle d'une machine frigorifique de CARNOT fonctionnant entre les températures  $T_f = 278\text{ K}$  ( $5\text{ }^\circ\text{C}$ ) et  $T_c = 325\text{ K}$  ( $52\text{ }^\circ\text{C}$ ).

### Utilisation du coulis d'hydrates de TBAB

L'évaporateur est à présent intégré dans un générateur de coulis, qui est le fluide secondaire utilisé pour ce système de climatisation. La fraction massique d'hydrate dans le coulis est de 20%. Ce dernier est stocké à  $12\text{ }^\circ\text{C}$  pour être acheminé ensuite vers l'ensemble des échangeurs thermiques des pièces à climatiser à  $20\text{ }^\circ\text{C}$ . Pour chaque pièce, on utilise un réservoir de stockage de volume  $V_s = 6\text{ m}^3$  et un échangeur thermique permettant d'obtenir une puissance maximale de climatisation  $P_{\text{clim}} = 6\text{ kW}$ . Le coulis, entrant dans l'échangeur thermique à la température de  $12\text{ }^\circ\text{C}$ , en ressort, fondu, à la température de  $17\text{ }^\circ\text{C}$ .

Pour les applications numériques, on utilisera :

- Capacité thermique massique de l'eau  $c_p^e = 4,18\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Capacité thermique massique de l'hydrate de TBAB  $c_p^{\text{hyd}} = 2,22\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Enthalpie massique de fusion de l'hydrate de TBAB à  $12\text{ }^\circ\text{C}$   $\ell_{\text{fus}}^{\text{hyd}} = 200\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Masse volumique moyenne du coulis  $\mu_c = 1020\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

14. Exprimer et calculer  $\Delta h$ , l'enthalpie massique disponible pour la climatisation de la pièce.

15. En déduire  $\Delta H_s$ , enthalpie disponible du réservoir de stockage pour le refroidissement.

16. La quantité  $\Delta H_s$  permet-elle de faire fonctionner le climatiseur 12 heures par jour ?

17. On souhaite reconstituer complètement le stock de coulis d'hydrates de TBAB pendant les 6 heures nocturnes les plus creuses en demande d'électricité. Calculer le débit massique minimal de butane à réaliser.

### Problème n° 3 – Moteur à échangeur thermique

CCP TSI 1999

Ce problème étudie deux dispositifs thermodynamiques destinés à produire du travail. Les parties A et B étudient certains éléments des dispositifs pris séparément. Les parties C et D analysent le fonctionnement global des dispositifs. Pour simplifier, les gaz seront considérés comme parfaits avec une capacité calorifique à pression constante  $C_p$  indépendante de la température et de la pression. On notera  $\gamma$  le rapport des capacités calorifiques à pression et à volume constants  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ .  $\gamma$  sera supposé lui aussi indépendant de la température et de la pression et sera pris numériquement égal à 1,38.

#### A. Étude d'un compresseur

Un compresseur est un appareil supposé adiabatique prenant du gaz à une pression  $P_1$  et le comprimant à une pression  $P_2$  en lui fournissant un travail  $W_k$ . Le compresseur est supposé travailler en régime continu, le débit du gaz rentrant dans le compresseur est égal au débit du gaz sortant. La température d'entrée sera notée  $T_1$ , la température de sortie  $T_2$ .

1. Rappeler l'énoncé du second principe de la Thermodynamique et en déduire qu'au cours d'une transformation adiabatique et réversible d'un système l'entropie se conserve.

2. Montrer que pour un gaz parfait, l'entropie  $S$  peut se mettre (à une constante près) sous la forme  $S = C_p \ln T - nR \ln P$ ,  $R$  étant la constante des gaz parfaits ( $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ),  $n$  le nombre de moles de gaz considéré,  $T$  la température absolue en degrés Kelvin et  $P$  la pression.

3. Déduire de la question précédente et de la relation de Mayer que lors d'une transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait la grandeur  $T^\gamma P^{1-\gamma}$  se conserve.

4. On effectue une compression adiabatique réversible amenant un gaz parfait de l'état  $(P_1, T_1)$  à l'état  $(P_2, T_2)$ . Exprimer  $T_2$  en fonction de  $T_1$ ,  $\gamma$ ,  $P_2$  et  $P_1$ .

5. Applications numériques : calculer  $T_2$  si  $T_1 = 293 \text{ K}$  dans les deux cas suivants :

$$\frac{P_2}{P_1} = 4,00 \qquad \frac{P_2}{P_1} = 8,00$$

6. Quel est alors le travail transféré en régime permanent par le compresseur à une mole de gaz au cours de la transformation ?

#### B. Étude d'un échangeur de chaleur à deux flux de gaz.

Dans ce dispositif (voir Figure 7), un flux de gaz de débit  $D$  rentre au niveau 1 avec une température  $T_1$  et une pression  $P_1$  dans l'échangeur et ressort au niveau 2 avec une température  $T_2$  et la même pression  $P_1$ . Dans le même temps, le même gaz rentre dans l'échangeur avec le même débit  $D$  au niveau 1' avec une température  $T_1'$  et une pression  $P_1'$  et ressort au niveau 2' avec une température  $T_2'$  et la même pression  $P_1'$ . Les deux gaz sont en contact thermique étroit entre eux dans l'échangeur sans pour autant se mélanger. L'échangeur est calorifugé de manière à ce que toute la chaleur perdue par l'un des gaz soit gagnée par l'autre.

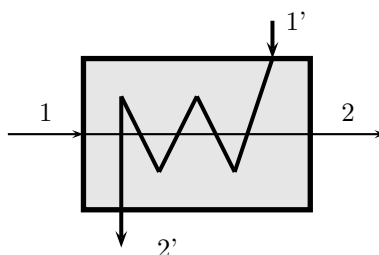


FIG. 7 – Échangeur thermique

7. Trouver la relation liant  $T_1'$ ,  $T_2'$ ,  $T_1$  et  $T_2$ .

8. On suppose que l'échange est suffisamment bon pour que  $T_2 = T_1'$ . Que peut-on dire alors de  $T_1$  et  $T_2'$  ?

#### C. Étude du premier dispositif.

On se propose d'étudier un dispositif de turbine à gaz à combustion. Le principe du dispositif est donné sur la Figure 8. L'air, pris à la pression  $P_1 = 1 \text{ bar}$  et à la température  $T_1 = 293 \text{ K}$ , rentre dans le compresseur (K) où il reçoit un travail  $W_k$  en subissant une compression adiabatique réversible jusqu'à la pression  $P_2 = 4 \text{ bar}$  et à la température  $T_2$ . Il rentre ensuite dans la chambre de combustion (C), dans laquelle il reçoit de façon isobare une quantité de chaleur  $Q_1$ . Il ressort de la chambre de combustion à la température  $T_3 = 923 \text{ K}$ . Il est ensuite envoyé dans une turbine où il subit une détente adiabatique et réversible qui le ramène à la pression  $P_1$  et à la température  $T_4$  en fournissant à la turbine le travail  $W_t$ . En sortant de la turbine, il est ramené à la

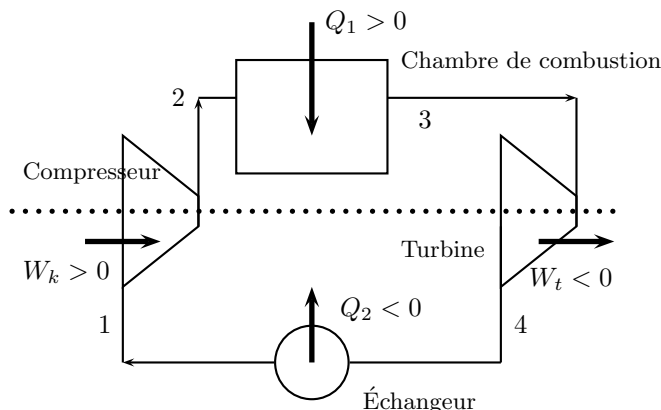


FIG. 8 – Premier dispositif

température  $T_1$  en échangeant de façon isobare une quantité de chaleur  $Q_2$  avec l'extérieur dans un échangeur et le cycle recommence.

9. Tracer les évolutions du gaz au cours de son cycle dans le diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ) :  $V$  en abscisses et  $P$  en ordonnées. On donnera clairement l'équation des courbes tracées dans ce diagramme.

10. Tracer les évolutions du gaz au cours du cycle dans le diagramme ( $T, S$ ) :  $S$  en abscisses et  $T$  en ordonnées. On montrera au préalable qu'une isobare est représentée dans le diagramme ( $T, S$ ) par une exponentielle croissante.

11. Calcul du rendement. Le rendement du cycle est défini par  $\eta = -\frac{W_t + W_k}{Q_1}$ . Justifier cette définition. Exprimer ce rendement en fonction de  $Q_1$  et  $Q_2$  uniquement.

12. Exprimer ensuite ce rendement en fonction de  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$  uniquement. En utilisant les résultats précédents, donner les valeurs numériques de  $T_2, T_4$  et de  $\eta$ .

13. Exprimer ensuite le rendement en fonction de  $P_1, P_2$  et  $\gamma$ . Vérifier que l'on retrouve bien numériquement la même valeur pour  $\eta$  que dans la question précédente.

**D. Étude du deuxième dispositif.**

Dans ce dispositif, on procède à un échange de chaleur entre le gaz sortant du compresseur et le gaz sortant de la turbine comme décrit dans la partie B. Le schéma de l'installation est alors celui de la Figure

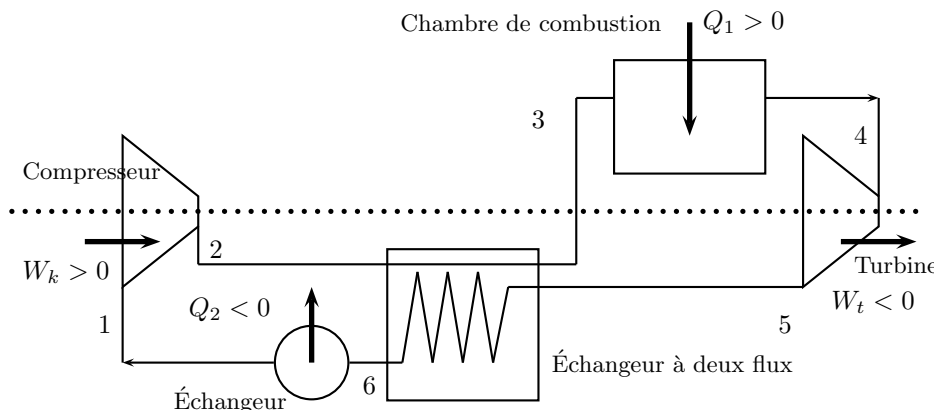


FIG. 9 – Deuxième dispositif

On a  $P_2 = 4$  bar,  $T_4 = 923$  K et l'échangeur à deux flux est supposé parfait, c'est-à-dire qu'il fonctionne dans les conditions de la question B.2.

14. Tracer les évolutions du gaz dans le diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ) en positionnant bien tous les points (1, 2, 3, 4, 5 et 6) du cycle notamment les entrées et sorties dans l'échangeur à deux flux.

15. Tracer les évolutions du gaz dans le diagramme entropique ( $T, S$ ) en positionnant bien tous les points du cycle notamment les entrées et sorties dans l'échangeur à deux flux.

16. Définir le rendement de l'installation et l'exprimer en fonction des diverses températures du cycle.

17. Calculer numériquement ce rendement. Conclure et interpréter.