Devoir de Sciences Physiques n°6 pour le 11-01-2008

Problème n^o 1 – Satellites de télécommunication *Mines MP 2007*

On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de rayon R_T et de centre O, immobile dans l'espace, sans rotation propre.
À la fin de cet énoncé, sont regroupés des valeurs de grandeurs physiques et un formulaire utilisables dans cette épreuve.

A. Satellite sur orbite circulaire

1. Un satellite de masse M_s est en orbite circulaire de centre O, à une altitude h de l'ordre de quelques centaines de kilomètres (orbite basse). Établir la relation entre la période de révolution T et h. Exprimer de même la relation entre la vitesse $v = ||\mathbf{v}||$ et h.

2. Soient E_c et E_p l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre ; établir le *théorème du viriel* : $2E_c + E_p = 0$.

3. À chaque position P du satellite correspond un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire. Pour un observateur situé en Q, la durée de visibilité τ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la figure 1) et sa disparition sous l'horizon (point B). Exprimer τ en fonction de h, G, M_T et R_T. Calculer τ pour $h = 800$ km.

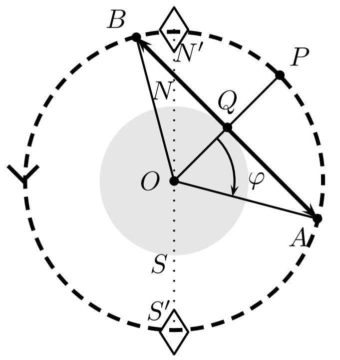

FIG. 1 – Trajectoire du satellite

4. Calculer T/τ. Pour les besoins de la téléphonie mobile, on place sur des orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre) un ensemble de satellites, identiques, appelé *train de satellites*. Ces satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de 800 km. Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un *train* afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant. Combien d'orbites polaires de ce type faut-il pour couvrir la surface de la Terre, c'est-à-dire pour que chaque point de la surface terrestre voie au moins un satellite à tout instant ? Combien doit-on disposer de satellites en tout ?

5. Dans cette question, on prend en compte la rotation de la Terre. Calculer la période et l'altitude d'un satellite placé sur orbite géostationnaire. La notion de durée de visibilité garde-t-elle, dans ce cas, un sens ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'un satellite géostationnaire comparé au train de la question 4.

6. La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement $\mathbf{f}_a$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\mathbf{f}_a = -\alpha M_S v \mathbf{v}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question. Déterminer la dimension de α. Écrire le théorème de l'énergie cinétique en supposant que le théorème du viriel établi à la question 2 reste applicable en présence de $\mathbf{f}_a$. Établir l'équation différentielle vérifiée par h.

7. Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une diminution d'altitude d'environ 1 m par révolution. Sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α (ne pas d'étonner de la petitesse extrême du résultat !). Calculer, avec la même approximation, ce qu'il advient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite. Comparer à la solution exacte. Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?

8. En réalité, les frottements dépendent de la densité de l'atmosphère et donc de l'altitude. Dans un certain domaine d'altitudes, α varie selon la loi $\alpha(h) = \dfrac{\gamma}{h^\beta}$, où γ et β sont positifs. Le même satellite que celui de la question 7 (perdant 1 mètre par révolution pour $h \simeq 800$ km) perd, à l'altitude de 400 km, 2 mètres par révolution. Calculer γ et β.

B. Stabilisation de l'altitude par gradient de gravité

La méthode de stabilisation d'altitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par LAGRANGE, au 17$^{\text{ème}}$ siècle, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

Modèle : le satellite est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques $m = M_S/2$ reliés par une tige rigide de masse nulle et de longueur 2ℓ. La barycentre S du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon $r_0 = R_T + h$ avec $\ell \ll r_0$. Le référentiel géocentrique R lié au repère $Oxyz$ est supposé galiléen. Le référentiel R' défini par le repère $Ox'y'z$ lié au satellite tourne autour de la Terre avec une vitesse angulaire Ω, voir la figure 2. Les points M_1 et M_2 sont dans le plan orbital : $\mathbf{OS} = r_0\mathbf{u}$, $\mathbf{OM}_1 = r_1\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{OM}_2 = r_2\mathbf{u}_2$, où $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont des vecteurs unitaires. On appelle θ l'angle de M_1M_2 avec l'axe Ox' de R'. On cherche à déterminer les éventuelles positions d'équilibre du satellite dans le référentiel R' et leur stabilité. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

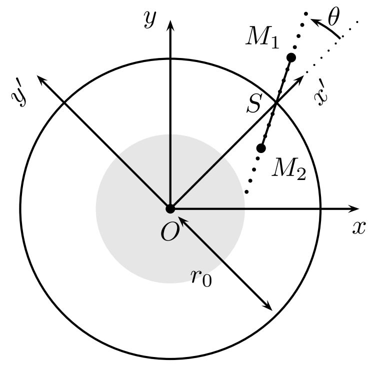

FIG. 2 – Le satellite, son référentiel $R'(Ox'y')$ et le référentiel lié à la Terre $R(Oxy)$

Étude dynamique dans le référentiel mobile

9. Exprimer les forces gravitationnelles $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ qui agissent sur M_1 et M_2.

10. Exprimer dans R' les forces d'inertie d'entraînement qui agissent sur M_1 et M_2, en fonction de m, Ω, $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$. Exprimer dans R' les forces de CORIOLIS qui agissent sur M_1 et M_2, en fonction de m, Ω, $\mathbf{SM}_1$, $\mathbf{SM}_2$ et $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

11. Montrer que dans R', le moment des forces d'inertie de CORIOLIS en S est nul. Établir que dans R' le moment résultant calculé en S des actions extérieures a pour amplitude pour $\ell \ll r_0$:

$$\Gamma_S = 6GmM_T\frac{\ell^2}{r_0^3}\sin\theta\cos\theta$$

Préciser la direction et le sens de ce moment de force.

12. Appliquer le théorème du moment cinétique dans R'. Établir l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les valeurs de θ qui correspondent à une position d'équilibre dans R'.

13. Montrer que $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable. Existe-t-il une position d'équilibre instable ? Quelle est la forme de l'équation différentielle pour les petits mouvements autour de la position d'équilibre stable ?

14. À partir de la position $\theta = 0$, le satellite subit une petite perturbation qui l'écarte d'une θ_0. Calculer la période des oscillations au voisinage de la position d'équilibre, pour un satellite d'altitude $h = 800$ km. Comparer cette période avec la période du satellite autour de la Terre.

Étude énergétique dans le référentiel géocentrique galiléen

15. Exprimer le potentiel de gravitation, en fonction des données du problème et en procédant aux approximations qui s'imposent ($\ell \ll r_0$).

16. Considérer l'énergie mécanique du satellite et en déduire la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

C. Communications spatiales

La satellite communique avec la Terre en émettant ou recevant des ondes électromagnétiques. Ces ondes traversent l'atmosphère, assimilée ici au vide, à l'exception d'une couche appelée ionosphère située environ à partir de l'altitude $z_i = 100$ km de la Terre. L'ionosphère est constituée d'un gaz sous très faible pression et partiellement ionisé par le rayonnement solaire, encore appelée plasma ionosphérique. Ce plasma contient donc des ions positifs de charge $+e$ et de masse M_i et des électrons de charge $-e$ et de masse m_e. L'ionosphère étant électriquement neutre, ions positifs et électrons ont même densité particulaire n. On étudie la propagation selon une verticale locale (voir la figure 3) d'une onde électromagnétique monochromatique plane progressive décrite par les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{E} = E_0 \exp i(\omega t - kz)\mathbf{e}_x \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B} = B_0 \exp i(\omega t - kz)\mathbf{e}_y$$

avec ω réel et constant. On admettra qu'étant donné les conditions expérimentales : $\dfrac{\omega}{k} \simeq c$.

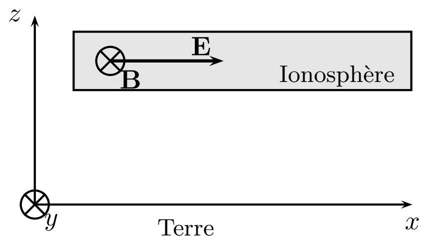

Fig. 3 – Ionosphère

17. Exprimer la force de Lorentz exercée sur les charges. Dans quelle condition peut-on négliger la contribution du champ magnétique devant celle du champ électrique ? Dans cette hypothèse, exprimer en notation complexe la vitesse $\mathbf{v}_e$ prise par un électron ; exprimer de même la vitesse $\mathbf{v}_i$ prise par un ion. On admet que l'amplitude des mouvements de l'électron est très petite devant la longueur d'onde du rayonnement. En déduire la densité de courant $\mathbf{j}$ qui apparaît dans le plasma. Simplifier cette expression en tenant compte de la relation $M_i \gg m_e$.

18. Écrire les équations de Maxwell dans le plasma. En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ $\mathbf{E}$, puis l'expression de k^2 en fonction de ω et des données. On introduira $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ et on posera $\omega_p^2 = ne^2/(m_e \varepsilon_0)$.

19. Discuter suivant la valeur de ω la possibilité de propagation de l'onde à travers le plasma. On montrera que l'ionosphère se comporte comme un filtre passe-haut dont on donnera la fréquence de coupure f_c.

20. Dans le cas où la propagation est possible, donner la relation de dispersion, la vitesse de phase v_φ, la vitesse de groupe v_g. Le milieu est-il dispersif ? Tracer les graphes de v_φ et de v_g en fonction de ω et donner une relation simple entre v_φ et v_g.

21. La densité particulaire est $n = 10^{12}$ m^{-3}. Comparer cette densité avec celle du cuivre, que l'on évaluera en admettant par exemple que chaque atome du cristal de cuivre métal fournit un électron libre. Donner le domaine de fréquences qui permet de communiquer avec le satellite.

22. On considère un canal de communication entre un satellite placé à une altitude de 800 km et un observateur terrestre tel que le satellite soit exactement à sa verticale. La fréquence de ce canal est 1 GHz. Quel sera le retard induit par l'ionosphère en supposant que celle-ci est homogène entre 100 km et 300 km d'altitude (on considérera que dans ce problème que l'atmosphère comprise entre 0 km et 100 km d'altitude a un indice égal à 1, et qu'au dessus de 300 km, la propagation s'effectue dans le vide) ? Comment se modifie ce retard lorsque la densité particulaire passe de valeur de $n_0 = 10^{12}$ m^{-3} (valeur typique de nuit) à $n_1 = 5 \times 10^{11}$ m^{-3} (valeur typique de jour), et en supposant que l'extension de l'ionosphère ne varie pas entre le jour et la nuit ?

Données :

Constante de gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2}
Rayon de la Terre	$R_T = 6\,400$ km
Masse de la Terre	$M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg
Masse du satellite	$M_s = 2 \times 10^3$ kg
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H $\cdot$ m^{-1}
Vitesse de la lumière	$c = 3 \times 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}
Masse de l'électron	$m_e = 0,91 \times 10^{-30}$ kg
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19}$ C

Formulaire :

$\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,) = \mathbf{grad}\,(\mathrm{div}\,) - \boldsymbol{\Delta}$

Problème n° 2 – Tube échangeur à ébullition de l'eau *CCP PC 2004*

Dans ce problème, on se propose d'étudier les transferts thermiques dans un tube cylindrique pouvant composer un échangeur thermique. Cet échangeur, appelé aussi tube vaporisateur, permet de produire de la vapeur d'eau, laquelle peut servir à alimenter un processus industriel. Dans l'ensemble du problème, la pression est constante, égale à la pression atmosphérique.

A. Transfert thermique dans un milieu homogène - Loi de Fourier

La loi de Fourier est une relation linéaire reliant en tout point d'un milieu matériel homogène, de conductivité thermique λ, le vecteur densité surfacique de flux thermique $\mathbf{j}$ et le gradient de température par :

$$\mathbf{j} = -\lambda \,\mathbf{grad}\, T$$

1. Justifier la présence du signe $-$ en facteur du gradient de température dans la loi de Fourier.

2. Donner l'expression du flux thermique élémentaire $\mathrm{d}\phi$ traversant l'élément de surface $\mathrm{d}S$, de normale extérieure $\mathbf{n}$.

3. Les lignes de flux sont les courbes tangentes, à chaque instant, au vecteur densité surfacique de flux thermique $\mathbf{j}$. Montrer que ces lignes de flux sont perpendiculaires aux isothermes.

4. Soit un solide indéformable de volume V, limité par une surface S. Ce solide a une conductivité thermique λ, une capacité thermique massique c et une masse volumique ρ. On appelle p_{th} en $\mathrm{W\cdot m^{-3}}$ la densité volumique de puissance thermique dégagée à l'intérieur du solide. L'application du premier principe de la Thermodynamique permet d'écrire la relation suivante :

$$\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}V + \oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = \int_V p_{th} \mathrm{d}V$$

Préciser très clairement, en termes de *production*, *stockage*, et *échange*, la signification physique des 3 termes de cette équation. En utilisant la loi de Fourier, établir l'équation de la diffusion thermique. Que devient cette équation dans le cas d'un milieu solide homogène et isotrope, dont la conductivité thermique est indépendante de la température ?

5. Mettre sous la forme suivante, l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{p_{th}}{\lambda}$$

Quel est le nom et la dimension du paramètre a ? Exprimer a en fonction de λ, ρ et c.

B. Transfert thermique dans un tube

Soit un tube de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2, infiniment long, de conductivité thermique λ. Les conditions thermiques sont telles que $T = T_1$ en $r = r_1$ et $T = T_2$ en $r = r_2$.

6. L'équation de la diffusion thermique à laquelle obéit le champ de température dans l'épaisseur du tube est :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}r^2} = 0$$

Préciser les hypothèses qui président à l'établissement de cette équation. Déterminer $T(r)$. En déduire l'expression du flux thermique ϕ à travers une surface cylindrique coaxiale de rayon r avec $r_1 \leq r \leq r_2$ et de longueur L. Pourquoi ce flux est-il constant ?

7. Par analogie avec la loi d'Ohm, la résistance thermique R_{th} du tube est définie par la relation : $T_1 - T_2 = R_{th}\phi$. Donner l'expression de la résistance R_{th} et préciser son unité. Donner une représentation schématique de cette relation, sous la forme d'un circuit électrique en précisant clairement les grandeurs analogues de l'intensité et du potentiel en électricité.

8. Que devient l'équation de diffusion thermique donnée à la question 6 si une densité volumique de puissance p_{th} est produite dans le matériau formant le tube ? La résoudre en utilisant les mêmes conditions aux limites que précédemment. Que devient la notion de résistance thermique ?

9. À l'interface entre un solide et un fluide, les échanges thermiques convectifs obéissent à la loi de Newton : $\mathbf{j}_c = h_c(T_p - T_f)\mathbf{n}$ où $\mathbf{j}_c$ est le vecteur densité surfacique de flux thermique échangé entre la paroi à la température T^p et le fluide dont la température loin de la paroi est T_f. $\mathbf{n}$ est la normale à la paroi orientée vers le fluide. h_c est le coefficient d'échange convectif ; il dépend de la nature du fluide, de sa température et du type d'écoulement. En appliquant l'analogie électrique, montrer que la résistance R_c équivalente à l'échange convectif entre une paroi cylindrique de rayon r_2, de longueur L, à la température T_p et un fluide de température constante et uniforme T_f, est égale à :

$$R_c = \frac{1}{h_c 2\pi r_2 L}$$

Montrer que si le coefficient d'échange convectif tend vers l'infini, la température de la paroi tend vers T_f.

10. Aux échanges convectifs paroi-fluide on doit ajouter, dans certains cas, les échanges par rayonnement thermique. Une façon simplifiée de prendre en compte le rayonnement est d'écrire que la densité surfacique de flux radiatif échangée entre une paroi à la température T_p et un milieu ambiant à la température T_{amb} est donnée par :

$$\mathbf{j}_{ray} = \varepsilon\sigma(T_p^4 - T_{amb}^4)\mathbf{n}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale à la paroi orientée vers l'extérieur, ε un coefficient compris entre 0 et 1 appelé *émissivité*, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$ et les températures sont exprimées en K.
Montrer que, moyennant certaines hypothèses qu'on précisera, le flux radiatif peut s'écrire : $\mathbf{j}_{ray} = h_{ray}(T_p - T_{amb})\mathbf{n}$. On exprimera h_{ray} en fonction de ε, σ et T_m définie comme la température moyenne entre T_p et T_{amb}. Avec $\varepsilon = 0,6$, $T_p = 333$ K, $T_{amb} = 293$ K et $T_f = T_{amb}$, calculer la densité de flux radiatif. La comparer à la densité de flux convectif calculée avec $h_c = 5\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.

11. En prenant en compte les échanges convectifs et radiatif, établir le schéma électrique équivalent aux échanges thermiques entre la paroi solide et le milieu ambiant. Montrer que les échanges thermiques convectif et radiatif peuvent se mettre sous la forme d'une seule résistance thermique, faisant apparaître un coefficient d'échange global h que l'on exprimera en fonction de h_c et h_{ray}.

12. Pour limiter les échanges d'énergie thermique, la paroi externe du tube est recouverte d'une couche d'épaisseur e d'un matériau isolant de conductivité thermique λ_e et d'émissivité $\varepsilon = 0$. Soit T_e la température de la surface extérieure de la couche d'isolant. Montrer, dans le cas où $p_{th} = 0$, que le transfert thermique entre la paroi interne à la température T_1 et le milieu extérieur à la température T_f est représenté par une association de 3 résistances que l'on précisera.

13. Calculer, en fonction de T_1, T_f, r_1, r_2, e, λ, λ_e, L et h_c le flux échangé entre la paroi interne et le fluide ambiant, sur une longueur L de tube. Expliquer pourquoi il existe une épaisseur optimale d'isolant et donner son expression en fonction des paramètres du problème.

C. Ébullition de l'eau en convection forcée

Dans cette partie, on admettra que le tube est parfaitement isolé sur sa paroi extérieure, c'est-à-dire en $r = r_2$. Le tube de conductivité électrique γ est parcouru par un courant électrique d'intensité I constante.

14. Calculer p_j dissipée par effet Joule par unité de longueur de tube.

15. La puissance dissipée par effet Joule sert à réchauffer de l'eau qui s'écoule dans le tube avec un débit volumique q. Soit $T_{eau}(x)$ la température de l'eau que l'on supposera fonction uniquement de la position x le long de l'axe de la canalisation. L'origine étant prise dans la section d'entrée de l'eau dans le tube. La pression est constante et égale à la pression atmosphérique.
Montrer que la température de l'eau obéit à l'équation suivante :

$$\rho_{eau} c_{eau} q \frac{\mathrm{d}T_{eau}}{\mathrm{d}x} = \frac{I^2}{\gamma\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

où ρ_{eau} est la masse volumique de l'eau et c_{eau} sa capacité thermique massique. Ces grandeurs sont supposées constantes. Quel mécanisme de transfert thermique a été négligé pour établir cette équation ? Pourquoi peut-on le négliger ?

16. Avec $T_0 = T_{ext} = 293$ K, calculer la position x_c dans le tube telle que $T_{eau} = 373$ K. On donne $q = 3,92 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$, $\gamma = 7,4 \times 10^4\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m^{-1}}$, $I = 40$ A, $\rho_{eau} = 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $c_{eau} = 4,18 \times 10^3\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, $r_1 = 5$ mm et $r_2 = 5,5$ mm. Que se passe-t-il pour $x > x_c$?

17. Soit $L_v = 2250\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ l'enthalpie massique de changement d'état de l'eau à la pression atmosphérique. Calculer la longueur de tube d nécessaire pour obtenir de la vapeur. Tracer l'allure du profil de température $T_{eau}(x)$ de l'eau dans un tube de longueur totale égale à 20 m. En fait, la longueur réelle de tube nécessaire pour obtenir de la vapeur est supérieure à celle calculée ci-dessus. Pourquoi ?