

Devoir de Sciences Physiques n°4 du 16-11-2007

— Solutions —

Problème n° 1 – Étude d'un étireur à réseaux

CCP MP 2005

A. Réseau à échelettes

Diffraction par une facette

1. La différence de marche se calcule de façon très classique dans ce cas où les rayons sont parallèles. On peut constater que la différence de marche se produit avant et après la facette sur le même rayon. Ainsi, on obtient :

$$\delta = y(\sin \alpha + \sin \alpha_0).$$

2. En appliquant le principe de Huygens-Fresnel, l'amplitude élémentaire diffractée par un élément dy de la facette est donnée par $ds = K s_0 \exp j\omega t \exp -j \frac{2\pi}{\lambda} \delta dy$. L'amplitude totale est $s = \int_0^b ds$. Le calcul conduit à

$$s = K s_0 b \exp j(\omega t - \frac{\pi}{\lambda} (\sin \alpha + \sin \alpha_0) b) \operatorname{sinc} \frac{\pi b (\sin \alpha + \sin \alpha_0)}{\lambda}.$$

3. L'intensité diffractée est proportionnelle à ss^* , on peut l'écrire sous la forme $I = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi b (\sin \alpha + \sin \alpha_0)}{\lambda}$. Son maximum est obtenu lorsque $\sin \alpha + \sin \alpha_0 = 0$, donc lorsque $\alpha = -\alpha_0$.

Diffraction par le réseau

4. Le calcul est identique à celui de la première question, on a $\delta = a(\sin i_0 + \sin \theta)$.

5. Un maximum principal correspond à une condition d'interférence constructive entre les ondes diffractées par le réseau d'où $\delta = m\lambda$ avec $m \in \mathbb{Z}$. On peut donc obtenir la condition : $\sin \theta^{(m)} = m \frac{\lambda}{a} - \sin i_0$.

6. Par construction des angles, on voit que $\theta = \alpha + \gamma$. Il faut réaliser les deux conditions $\alpha = -\alpha_0$ et $\sin \theta^{(1)} = \frac{\lambda}{a} - \sin i_0$. On a $\theta^{(1)} = \gamma - \alpha_0$ sans oublier que $i_0 = \alpha_0 - \gamma$, cela nous permet d'écrire que $\theta^{(1)} = 2\gamma - i_0 = 15^\circ$.

La périodicité du réseau est $a = \frac{\lambda}{\sin(2\gamma - i_0) + \sin i_0} = 2,07 \mu\text{m}$.

B. Combinaison de deux réseaux à échelettes

7. τ est la largeur temporelle de l'impulsion puisque $E(t = \tau) = \frac{E_0}{e}$.

8. La transformée de Fourier est donnée par $\widehat{E}(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{t^2}{\tau^2} + i(\omega_0 - \omega)t] dt$. On peut identifier à l'intégrale proposée dans l'énoncé en posant $c_1 = \frac{1}{\tau^2}$ et $c_2 = \frac{\omega - \omega_0}{2}$. Le résultat est : $\widehat{E}(\omega) = \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2}} \exp -[\frac{(\omega - \omega_0)^2 \tau^2}{4}]$.

9. La largeur spectrale est $\omega - \omega_0 = \frac{2}{\tau}$.

10. La relation du réseau 1 appliquée à la pulsation ω_0 est $\sin \theta_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0 a} - \sin i_0$. On peut constater logiquement que $\theta_0 = \theta^{(1)}$. Cette relation définit l'angle d'émergence θ_0 après le premier réseau. Mais, du fait du parallélisme des deux réseaux, le rayon lumineux associé à ω_0 arrive sous l'incidence θ_0 sur le second réseau. On peut donc écrire que son angle d'émergence β est tel que $\sin \beta = \frac{2\pi c}{\omega_0 a} - \sin \theta_0$. On constate que l'angle de diffraction par le deuxième réseau est $\beta = i_0$ mesuré par rapport à la normale à ce même second réseau.

11. Au vu de la relation $\sin \theta(\omega) = \frac{2\pi c}{\omega a} - \sin i_0$, on peut conclure que si $\omega > \omega_0$, alors le terme $\frac{2\pi c}{\omega a} < \frac{2\pi c}{\omega_0 a}$. On a donc : $\theta(\omega) < \theta_0$. Le rayon lumineux associé à ω arrive sur le premier réseau sous l'incidence i_0 , il se trouve diffracté dans la direction $\theta(\omega)$ qui est aussi l'incidence sur le second réseau et par conséquent son angle d'émergence est i_0 . Tous les rayons diffractés émergent du second réseau parallèles avec l'angle i_0 .

12. Voir la figure 1.

13. On a $x(\theta) = z(\tan \theta(\omega) - \tan \theta_0) \cos i_0$.

14. Commençons par différentier la relation du réseau : $\cos \theta d\theta = -\frac{2\pi c d\omega}{a\omega^2}$. Or les angles restent voisins de θ_0 et les pulsations voisines de ω_0 . On pourra donc retenir que : $\Delta \theta = -\frac{2\pi c}{a\omega_0^2 \cos \theta_0} \Delta \omega$.

15. On différencie la relation donnant $x(\theta)$: $dx = -z \cos i_0 \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$. pour les mêmes raisons que dans la question précédente, on peut écrire que $\Delta x = x - x(\omega_0) = x - z \cos i_0 \frac{\Delta \theta}{\cos^2 \theta_0}$. En regroupant les deux formules obtenues par différenciation, on arrive à $x = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \frac{z \lambda_0}{a} \frac{\cos i_0}{\cos^3 \theta_0}$.

16. Comme le profil spectral $\widehat{E}(\omega)$ est de type gaussien, le profil spatial en x sera lui aussi de type gaussien.

17. La largeur temporelle de l'impulsion étant $\omega - \omega_0 = \frac{2}{\tau}$, on obtient une largeur spatiale $\Delta x_{1/e} = \frac{1}{\pi c \tau} \frac{z \lambda_0^2}{a} \frac{\cos i_0}{\cos^3 \theta_0}$. $\theta_0 = 15^\circ$ a déjà été calculé. On trouve $\Delta x_{1/e} = 3,2 \text{ cm}$.

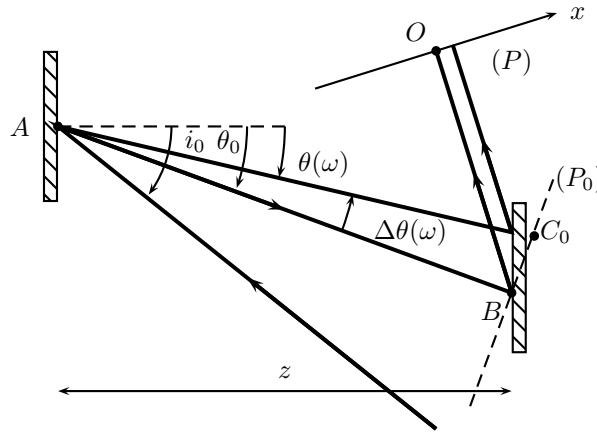


FIG. 1 – Émergence d'un faisceau de rayons parallèles

C. Étirement temporel d'impulsions lumineuses

18. Écrire que $\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\phi}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \simeq 1$ revient à écrire $\frac{\tau_0^2}{\tau^2} \simeq 1$. On constate donc que si $\tau < \tau_0$ alors la correction d'ordre 2 est nécessaire.

19. Soit C_0 le point d'intersection entre le prolongement du rayon lumineux d'angle $\theta(\omega)$ associé à la pulsation ω et le plan (P_0) , voir la figure 1. La phase accumulée est $\phi = k(AC_0)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$. Ainsi on a $\phi = \frac{\omega}{c} \frac{AB}{\cos \Delta\theta}$. Compte tenu du fait que l'angle $\Delta\theta$ est petit, on peut proposer : $\phi(\omega) = \frac{\omega}{c} AB \left(1 + \frac{\Delta\theta^2}{2} \right)$.

20. La phase accumulée peut se réécrire selon $\phi(\omega) = \left(\frac{\omega_0}{c} AB + \frac{\Delta\omega}{c} AB \right) \left(1 + \frac{\Delta\theta^2}{2} \right)$. On développe ce calcul et on obtient en ne conservant pas le terme d'ordre 3 issu de $\Delta\theta^2 \Delta\omega$: $\phi(\omega) = \frac{\omega_0}{c} AB + \frac{\Delta\omega}{c} AB + \frac{\omega_0 AB}{2c} \Delta\theta^2$. On a donc : $\left(\frac{d\phi}{d\omega} \right)_{\omega_0} = \frac{AB}{c}$. Ce coefficient correspond à la durée de parcours de l'onde de pulsation ω_0 entre les deux réseaux.

21. A partir de l'expression de la phase de la question précédente, on arrive à identifier le coefficient d'ordre 2 puisque $\Delta\theta = -\frac{2\pi c}{a\omega_0^2 \cos \theta_0} \Delta\omega$. Après calculs et utilisation de la relation $AB = \frac{z}{\cos \theta_0}$, on trouve

$$\left(\frac{d^2\phi}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} = \frac{\lambda_0^3 z}{2\pi c^2 a^2 \cos^2 \theta_0} = 7 \times 10^{-24} \text{ s}^2. \text{ On trouve aussi } \tau_0 = 3,7 \times 10^{-12} \text{ s}.$$

22. Ce calcul correspond à une transformée de Fourier : $E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\omega) \exp(i\omega t - \phi(\omega)) d\omega$ car il faut tenir compte du déphasage évalué précédemment. Nous avons établi que $\hat{E}(\omega) = \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{(\omega_0 - \omega)^2 \tau^2}{4}\right]$ et en tenant compte de la phase accumulée $\phi(\omega)$, on peut écrire que : $E(t) = \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\omega_0 t - \phi(\omega_0)) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[iu \left(t - \left(\frac{d\phi}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right) - u^2 \frac{\tau^2 + i\tau_0^2}{4}\right] du$ où on a posé $u = \omega - \omega_0$. On peut effectuer le calcul grâce à l'intégrale fournie dans l'énoncé à condition de poser $c_2 = 2 \left(\left(\frac{d\phi}{d\omega} \right)_{\omega_0} - t \right)$ et $c_1 = \frac{\tau^2 + i\tau_0^2}{4}$. c_1 est complexe, on devra pour en prendre la racine utiliser son équivalent $c_1 = \frac{\sqrt{\tau^4 + \tau_0^4}}{4} \exp i\epsilon$ avec $\tan \epsilon = \frac{\tau_0^2}{\tau^2}$. Le calcul du champ électrique passe par

$$E(t) = \frac{E_0 \tau}{(\tau^4 + \tau_0^4)^{1/4}} \exp\left[-\frac{\left(t - \left(\frac{d\phi}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right)^2 4\tau^2}{\tau^4 + \tau_0^4}\right] \exp\left[i\left[\omega_0 t - \phi(\omega_0) - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\left(t - \left(\frac{d\phi}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right)^2 4\tau^2}{\tau^4 + \tau_0^4}\right]\right].$$

23. Le module du champ est $E(t) = \frac{E_0 \tau}{(\tau^4 + \tau_0^4)^{1/4}} \exp\left[-\frac{\left(t - \left(\frac{d\phi}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right)^2 4\tau^2}{\tau^4 + \tau_0^4}\right]$.

24. L'expression du module du champ électrique peut s'écrire sous la forme : $E(t) = \frac{E_0 \tau}{(\tau^4 + \tau_0^4)^{1/4}} \exp\left[-\frac{\left(t - \left(\frac{d\phi}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right)^2}{\tau_P^2}\right]$.

On en déduit que : $\tau_P = \frac{\sqrt{\tau^4 + \tau_0^4}}{2\tau}$.

25. La durée de l'impulsion est $\tau_P = 6,8 \times 10^{-11} \text{ s}$. Il y a bien eu un élargissement. Comme le faisceau de lumière est constitué au niveau du plan (P) d'un ensemble de rayons parallèles, la reconstitution de l'impulsion peut s'effectuer au foyer image d'une lentille convergente.

Problème n° 2 – Circuit secondaire d'une centrale nucléaire

CCP MP 2007

A. Étude du système liquide-vapeur

1. Voir la question suivante.

2. Le diagramme de CLAPEYRON (p, v) de l'eau est représenté sur la figure 2. Le point critique C est au sommet de la courbe de saturation. L'isotherme critique à la température critique présente un point d'inflexion au niveau du point critique. La variance d'un système d'un corps pur diphasé est $[v = 1]$. Si on fixe la température alors la pression est automatiquement fixée. Cela se traduit par le fait que pendant tout le changement d'état (système liquide-vapeur ici), si la pression est fixée alors la température est aussi fixée et réciproquement. C'est pourquoi, on parle de palier de changement d'état.

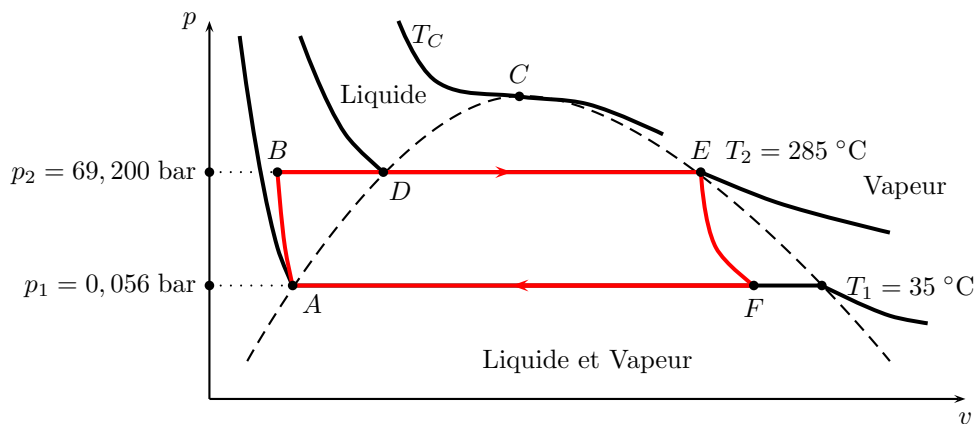


FIG. 2 – Diagramme de CLAPEYRON et cycle de RANKINE

3. Le volume ou l'enthalpie sont des grandeurs extensives, l'enthalpie du système diphasé correspond à la somme des contributions des enthalpies de la phase liquide et de la phase vapeur. On a donc : $h_m = xh_G + (1 - x)h_L$. Cette formule donne immédiatement $[x = \frac{h_m - h_L}{h_G - h_L}]$. La même formule s'obtient aussitôt pour le volume massique.

4. La chaleur latente massique de vaporisation à la température T correspond à la différence d'enthalpie entre les deux états considérés : $[l_v(T) = h_G(T) - h_L(T)]$.

B. Détente adiabatique réversible d'un système liquide-vapeur

5. En mettant 10 g d'eau dans un volume de 10 L, on se place à un volume massique pour l'ensemble des deux phases de $v_m = \frac{V}{m} = 1 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$. On a donc $v_m = xv_G + (1 - x)v_L$. Cela permet d'écrire que :

$$[x = \frac{v_L - v_m}{v_L - v_G} = 40,3\%]$$

6. La transformation est adiabatique et réversible, cela signifie donc qu'elle est isentropique. On écrit donc que l'entropie massique est conservée : $c_L \ln T + x \frac{l_v(T)}{T} = c_L \ln T' + x' \frac{l_v(T')}{T'}$. D'après les valeurs fournies dans le tableau, on trouve que $l_v(T) = 2253,02 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à 100 °C et $l_v(T') = 2378,46 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à 50 °C . À partir de ces valeurs et des températures exprimées en KELVIN, on trouve : $[x' = 41,2\%]$.

7. On reprend la formule précédente avec $x'' = x$. On en déduit que : $c_L \ln \frac{T}{T'} = x'' (\frac{l_v(T')}{T'} - \frac{l_v(T)}{T})$. Cela conduit à : $[x'' = 45,5\%]$.

C. Modèle de fonctionnement d'une turbine à vapeur. Cycle de Rankine

8. Le cycle décrit par l'eau dans le diagramme de CLAPEYRON (p, v) est représenté sur la figure 2.

9. On a $ds = c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L dp$. Comme la transformation est isentropique, on en déduit que $c_L \frac{dT}{T} = \alpha v_L dp$. Le fluide étant considéré comme incompressible, on intègre à volume constant. Cela donne : $c_L \ln \frac{T_f}{T_i} = \alpha v_L (p_2 - p_1)$. Si on note ΔT l'écart de température, alors $T_f = T_1 + \Delta T$. La formule trouvée précédemment donne ainsi $c_L \ln(1 + \frac{\Delta T}{T_1}) = \alpha v_L (p_2 - p_1)$ et comme l'écart de température vérifie $\Delta T \ll T_1$, on peut effectuer un développement limité du logarithme. On trouve donc que : $[\Delta T = \frac{\alpha v_L T_1}{c_L} (p_2 - p_1) = 0,076 \text{ °C}]$. Cette valeur est effectivement très faible devant la température de départ $T_1 = 308,15 \text{ K}$.

10. On utilise la même formule que dans la partie précédente entre l'état initial E pour lequel $x_E = 1$ et l'état final F de composition x_F . Cela donne : $c_L \ln T_2 + \frac{l_v(T_2)}{T_2} = c_L \ln T_1 + x_F \frac{l_v(T_1)}{T_1}$. Les valeurs tabulées conduisent à $l_v(T_2) = 1507,72 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $l_v(T_1) = 2414,33 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. On peut procéder à l'application numérique :

$x_F = 66,2\%$. Du fait du caractère extensif de l'enthalpie déjà évoqué, on a : $h_{mF} = x_F h_G(T_1) + (1-x_F)h_L(T_1)$.
 On trouve : $h_{mF} = 1744,6 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

11. Dans le condenseur, le fluide perd de l'énergie correspondant au changement d'état : $Q_1 = h_{mA} - h_{mF} = h_L(T_1) - h_{mF}$. On trouve : $Q_1 = -1598,3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Dans le générateur de vapeur, on passe de façon isobare de l'état B à l'état E . De l'état B à l'état D , on élève la température du liquide de façon isobare. La contribution est $c_L(T_D - T_B)$. Or $T_D = T_2$ et comme on l'a vu dans le calcul de l'élévation négligeable de température dans la pompe, on peut écrire que $T_B \simeq T_1$. Pour le passage de l'état D à l'état E , c'est l'enthalpie de vaporisation qui compte. On trouve : $Q_2 = c_L(T_2 - T_1) + l_v(T_2)$. Cela donne : $Q_2 = 2552,7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

12. Sur un cycle complet, la variation d'enthalpie est nulle. Ici la grandeur pertinente est l'enthalpie et non l'énergie interne puisqu'on travaille avec un système en écoulement supposé permanent. Cela signifie d'autre part que le travail W évoqué par l'énoncé correspond à un travail souvent qualifié d'*utile* ou encore de *technique* dans les problèmes de Thermodynamique. On a donc : $W + Q_1 + Q_2 = 0$. On en déduit que : $W = -954,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Ce travail est perdu par le fluide au profit de l'alternateur et c'est que qui permet de produire de l'électricité.

13. L'efficacité ρ (ou rendement thermodynamique) du cycle est définie comme le rapport du transfert énergétique utile à savoir $-W$ et du transfert énergétique payant. C'est bien entendu Q_2 qu'il faut payer pour arriver à obtenir de la vapeur dans le générateur de vapeur. On a donc : $\rho = \frac{-W}{Q_2} = 37,4\%$. Dans un cycle idéal de CARNOT, on a toujours : $W + Q_1 + Q_2 = 0$. Comme le cycle est idéal, cela signifie qu'il ne crée pas d'entropie et que le bilan entropique sur un cycle est : $\Delta s = 0 = s_{\text{transférée}} + s_{\text{créée}}$ avec $s_{\text{créée}} = 0$. L'entropie massique transférée est donc exprimée par $s_{\text{transférée}} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ puisque les transferts thermiques s'effectuent réversiblement avec deux thermostats à T_1 et T_2 . On en déduit l'expression classique du rendement de CARNOT : $\rho_c = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 44,8\%$. Le rendement trouvé est inférieur au rendement de CARNOT ce qui est bien conforme au second principe de la Thermodynamique.

14. D'après la seconde identité thermodynamique, on a $dh = Tds + v_l dp$. Dans le cadre d'une transformation isentropique, on a $ds = 0$. On a donc $dh = v dp = v_L dp$. On obtient $\Delta h_{AB} = v_L(p_2 - p_1)$. On trouve : $\Delta h_{AB} = 6,9 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Cette valeur est vraiment négligeable devant les autres enthalpies mises en jeu.

15. Dans la turbine, on a $\Delta H = W_{\text{technique}} + Q$ avec $Q = 0$ puisque la transformation est adiabatique. Ainsi : $\Delta h_{EF} = w_{\text{turb}}$. Pour toutes les autres étapes (puisque'on néglige le passage dans la pompe), on a $W_{\text{technique}} = 0$ puisqu'aussi bien le condenseur que le générateur de vapeur ne comporte aucune pièce mobile (ni pale, ni piston...). Ainsi, la seule enthalpie contribuant au travail est : $\Delta h_{EF} = w_{\text{turb}}$.

D. Cycle de Rankine avec soutirage

16. Le cycle de RANKINE avec soutirage décrit par l'eau dans le diagramme de CLAPEYRON (p, v) est représenté sur la figure 3.

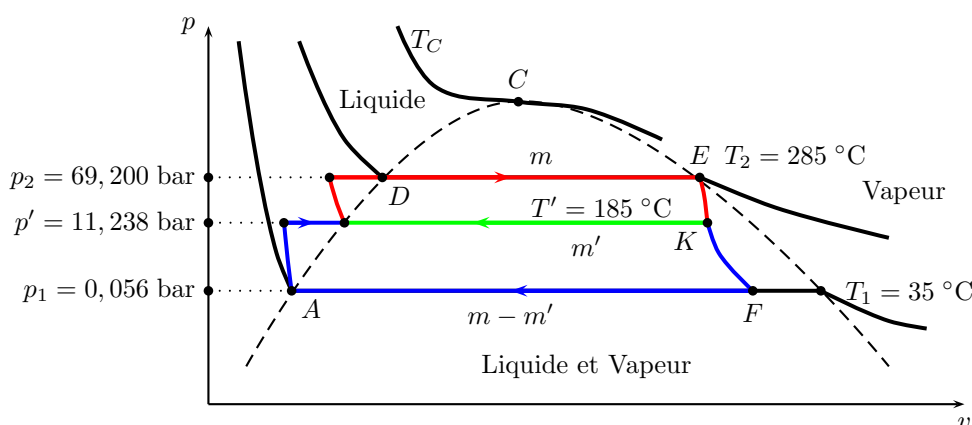


FIG. 3 – Cycle de RANKINE avec soutirage

Dans le réchauffeur, le bilan enthalpique est nul. Il rentre dans ce réchauffeur un mélange liquide-vapeur de composition x_K . La vapeur qui va ensuite se transformer en liquide va dégager l'énergie nécessaire pour réchauffer la masse $m - m'$ qui arrive par la pompe n°1. Il faut donc calculer x_K en utilisant la conservation de l'entropie comme nous l'avons déjà fait : $c_L \ln T_2 + \frac{l_v(T_2)}{T_2} = c_L \ln T' + x_K \frac{l_v(T')}{T'}$. On trouve $x_K = 81,0\%$. On suppose qu'il n'y a aucune perte d'énergie au profit de l'extérieur. Il suffit donc d'écrire que l'énergie perdue par la masse $x_K m'$ de vapeur est intégralement transférée au profit de la masse d'eau liquide $m - m'$ qui voit sa température augmenter. On a donc : $(m - m')c_L(T' - T_1) = m'x_K l_v(T')$. Pour faciliter le raisonnement, on écrit $y = \frac{m'}{m}$, la

fraction y sera appelée taux de soutirage, ainsi on raisonnera toujours sur une masse totale de fluide $m = 1$ kg. On trouve $y = \frac{c_L(T' - T_1)}{x_K l_v(T') + c_L(T' - T_1)}$. On trouve : $y = 0,280$.

17. On constate que $x_K = x'_1$. on a $c_L \ln T_2 + \frac{l_v(T_2)}{T_2} = c_L \ln T' + x'_1 \frac{l_v(T')}{T'}$ d'où $x'_1 = 81,0\%$. L'enthalpie massique est $h'_1 = x'_1 h_G(T') + (1 - x'_1) h_L(T')$, d'où : $h'_1 = 2399,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

18. En fait le titre à la sortie de la seconde turbine est le même que celui calculé avant car la partie de masse m qui fait la détente complète à savoir la masse $m - m' = m(1 - y)$ passe toujours de l'état E à l'état F . On a donc $x_2 = 66,2\%$. On a déjà calculé l'enthalpie massique au point F , il suffit juste de prendre en compte le fait que la masse concernée est seulement $m(1 - y)$. On a donc pour $m = 1$ kg : $H_2 = (1 - y) h_{mF} = 1256,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

19. Le réchauffeur est neutre du point de vue du bilan énergétique. Il faut calculer les transferts thermiques Q'_1 dans le condenseur et Q'_2 dans le générateur de vapeur. On trouve : $Q'_1 = (1 - y) Q_1 = -1150,8 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $Q'_2 = c_L(T_2 - T') + l_v(T_2) = 1925,7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Compte tenu de l'approximation visant à négliger les variations d'enthalpie dans les pompes, on a : $W' = -(Q'_1 + Q'_2) = -774,9 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

20. L'efficacité du cycle avec soutirage est alors : $\rho' = \frac{-W'}{Q'_2} = 40,2\%$. Ce rendement (qui reste logiquement inférieur au rendement de CARNOT de 44,8%) est un peu plus élevé que le précédent, on voit l'intérêt du soutirage. Il y a toutefois un inconvénient : sans soutirage le travail massique pour un cycle était $|W| = 954,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, il n'est plus que de $|W'| = 774,9 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Pour un débit massique donné de vapeur d'eau, on aura moins de puissance sur l'arbre de l'alternateur.