

Devoir de Sciences Physiques n°4 pour le 16-11-2007

Problème n° 1 – Étude d'un étireur à réseaux

CCP MP 2005

Dans le domaine de l'optique ultra-rapide, l'amplification des impulsions lumineuses se heurte à une difficulté majeure. En effet, lors de l'amplification, l'intensité crête, inversement proportionnelle à la durée des impulsions, peut prendre des valeurs bien supérieures au seuil de dommage du milieu amplificateur. Pour éviter cela, on utilise des dispositifs optiques permettant d'étirer temporellement l'impulsion avant amplification, et de la « recomprimer » après amplification.

Dans ce problème, on se propose d'étudier le principe d'un étireur d'impulsions constitué par l'association de deux réseaux identiques parallèles entre eux. Enfin, on étudiera dans la troisième partie le changement de profil temporel d'une impulsion de lumière se propageant dans ce dispositif optique.

A. Réseau à échelettes

On considère le réseau en réflexion dit à échelettes représenté sur la figure 1, constitué d'une succession de facettes réfléchissantes (largeur b) inclinées d'un angle γ par rapport au plan du réseau. Une onde plane monochromatique (longueur d'onde λ) éclaire le réseau sous un angle i_0 par rapport à la normale \mathbf{e}_r et on observe l'onde diffractée à l'infini dans la direction qui fait un angle θ avec \mathbf{e}_r . Les angles d'incidence et de diffraction par rapport à la normale \mathbf{e}_f de la facette sont respectivement α_0 et α .

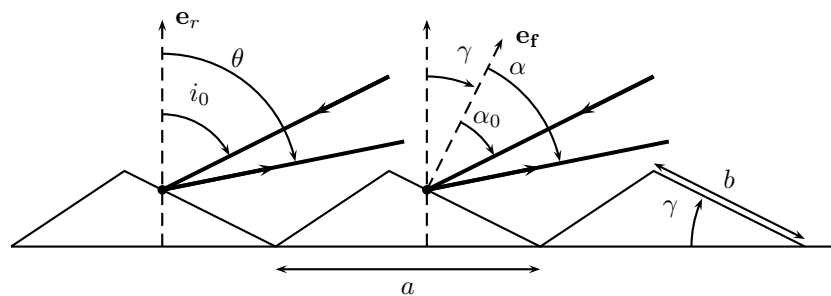


FIG. 1 – Réseau à échelettes

Diffraction par une facette

1. Exprimer la différence de phase entre les ondes véhiculées par deux rayons incidents dont l'un tombe sur un extrémité de l'arête de la facette en fonction de α_0 , α et de la distance y , voir la figure 2.

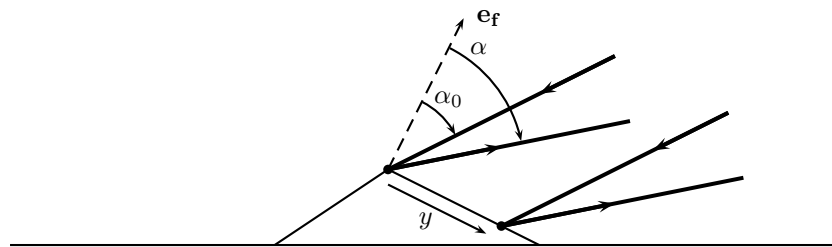


FIG. 2 – Diffraction par une facette

2. En déduire l'expression de l'amplitude diffractée par une facette dans la direction α .

3. Dans quelle direction de l'espace se situe le centre de la figure de diffraction ?

Diffraction par le réseau

4. Exprimer la différence de phase entre les ondes véhiculées par deux rayons homologues incidents tombant sur deux facettes consécutives, séparés d'une distance a et des angles i_0 et θ , voir la figure 3.

5. En déduire la position des maxima principaux $\theta^{(m)}$ en fonction de λ , a , i_0 et d'un nombre entier m .

6. On veut faire coïncider pour une longueur d'onde λ_0 l'ordre 1 du réseau avec le maximum de la courbe de diffraction d'une facette. Calculer la distance a entre les facettes qui permette de réaliser cette condition. Application numérique : $\gamma = 30^\circ$, $i_0 = 45^\circ$, $\lambda_0 = 2 \mu\text{m}$.

On suppose par la suite que la condition de la question 6 est réalisée et que le réseau (avec $\gamma = 30^\circ$) se comporte comme un miroir, réfléchissant l'onde incidente dans la direction $\theta(\omega)$ donnée par $\sin \theta(\omega) = \frac{2\pi c}{\omega a} - \sin i_0$ pour

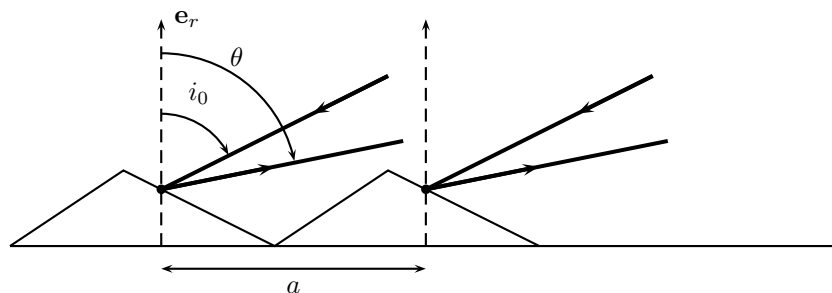


FIG. 3 – Interférence entre deux rayons homologues

des longueurs d'ondes $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ proches de $\lambda_0 = 2 \mu\text{m}$ et où c est la vitesse de la lumière ($c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). On néglige l'énergie répartie sur les autres maximums. On supposera aussi que la largeur du pic principal est négligeable.

B. Combinaison de deux réseaux à échelettes

On considère maintenant deux réseaux à échelettes (mêmes paramètres γ et a) parallèles entre eux disposés comme le montre la figure 4. La distance z entre les réseaux est supposée être grande de sorte que l'on se trouve dans les conditions de diffraction à l'infini quand l'onde lumineuse irradie le réseau 2. On envoie une onde plane véhiculée par le rayon incident faisant un angle $i_0 = 45^\circ$ avec la normale au réseau 1. L'onde à l'entrée du réseau 1 est une impulsion lumineuse qui s'écrit sous la forme $E(t) = E_0 \exp(-\frac{t^2}{\tau^2}) \exp(i\omega_0 t)$ où τ est une constante et $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ est la pulsation centrale. On définit les relations de passage entre une fonction complexe $E(t)$ et sa transformée de Fourier $\hat{E}(\omega)$:

$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(-i\omega t) dt \quad \text{et} \quad E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

$\hat{E}(\omega)$ est une fonction complexe de ω . L'impulsion lumineuse peut être décrite comme une superposition d'ondes monochromatiques dont le poids de chaque composante est donné par $\frac{1}{2\pi} |\hat{E}(\omega)|^2$. On a dessiné sur la figure 4 le trajet correspondant à une onde de pulsation centrale ω_0 . On pose $\theta_0 = \theta(\omega_0)$. On donne la relation $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(c_1 t^2 + 2ic_2 t)) dt = \sqrt{\frac{\pi}{c_1}} \exp(-\frac{c_2^2}{c_1})$ avec c_2 réel et c_1 éventuellement complexe mais de partie réelle positive. On convient de définir la « largeur » d'une courbe comme la demi-largeur à $\frac{1}{e}$ du maximum de cette courbe.

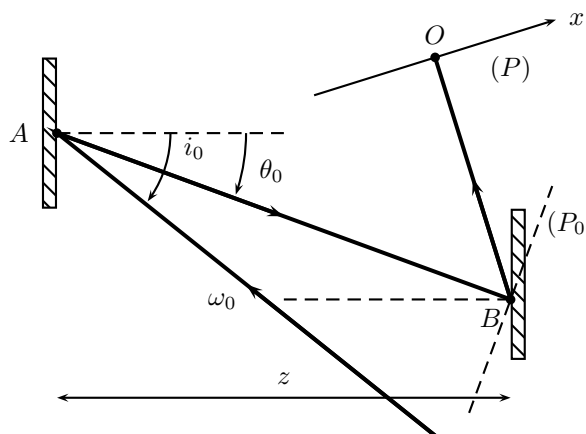


FIG. 4 – Combinaison de deux réseaux

7. Donner la signification de τ .
8. Calculer la transformée de Fourier $\hat{E}(\omega)$ de l'impulsion.
9. En déduire sa « largeur ».

10. Montrer, en utilisant la relation $\sin \theta(\omega) = \frac{2\pi c}{\omega a} - \sin i_0$, que le rayon lumineux associé à ω_0 est diffracté par le deuxième réseau dans la direction i_0 mesurée par rapport à la normale à ce même second réseau.

11. Montrer que le rayon lumineux associé à $\omega > \omega_0$ est diffracté par le premier réseau dans une direction $\theta(\omega) < \theta_0$. Montrer qu'il est lui aussi diffracté par le deuxième réseau dans la direction i_0 mesurée par rapport à la normale à ce même second réseau.

12. Dessiner à partir du point d'impact A le trajet d'un rayon correspondant à $\omega = \omega_0$ ainsi que celui d'un rayon correspondant à une composante spectrale $\omega > \omega_0$.

13. Pour une composante spectrale ω , trouver la relation $x(\theta)$ donnant le point d'impact du rayon lumineux sur le plan d'observation (P) perpendiculaire au trajet du rayon associé à ω_0 . On prendra comme origine $x = 0$ pour $\omega = \omega_0$. La relation $x(\theta)$ sera exprimée en fonction de z , $\theta(\omega)$, θ_0 et i_0 .

14. A partir de la relation $\sin \theta(\omega)$, trouver la relation entre $\Delta\theta = \theta(\omega) - \theta_0$ et $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. On rappelle que ω et θ sont proches de ω_0 et θ_0 respectivement.

15. En déduire la relation $\omega(x)$ caractérisant l'étalement spatial du spectre de l'impulsion le long du plan (P).

16. En ne tenant compte que de la dispersion spatiale déterminée précédemment, indiquer la nature du profil spatial de l'intensité lumineuse au niveau de ce plan (P).

17. Application numérique : calculer θ_0 en degré puis la « largeur » de la courbe de l'intensité diffractée dans le plan (P) pour $\tau = 100 \times 10^{-15}$ s, $z = 2$ m et $a = 2,07$ μm .

C. Étirement temporel d'impulsions lumineuses

La différence de phase totale $\Delta\phi$ accumulée jusqu'au plan (P) entre deux rayons associés à ω et ω_0 s'exprime à partir d'un développement limité à l'ordre 2 comme :

$$\Delta\phi = \left(\frac{d\phi}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\phi}{d\omega^2}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \quad \text{avec} \quad \Delta\phi = \phi(\omega) - \phi(\omega_0)$$

18. En comparant à l'unité le terme de second ordre, pour quelles durées τ la correction d'ordre 2 est-elle nécessaire? On prendra $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{2}{\tau}$ et on comparera τ à τ_0 défini par $\tau_0^2 = 2 \left(\frac{d^2\phi}{d\omega^2}\right)_{\omega_0}$.

19. Le coefficient $\left(\frac{d^2\phi}{d\omega^2}\right)_{\omega_0}$ peut être calculé en utilisant le fait que le déphasage quadratique au niveau du plan (P) est le même que le déphasage dans le plan (P_0) perpendiculaire à la direction définie par θ_0 (voir la figure 4) et est dû uniquement à la diffraction par le réseau 1. Calculer la phase $\phi(\omega)$ accumulée par un rayon associé à ω à partir du point d'impact A et jusque dans le plan (P_0) en fonction de la distance AB , de ω , c et $\Delta\theta = \theta(\omega) - \theta_0$.

20. En déduire le coefficient $\left(\frac{d\phi}{d\omega}\right)_{\omega_0}$. Quelle est sa signification?

21. En utilisant à nouveau le calcul de la question 19, déterminer le coefficient $\left(\frac{d^2\phi}{d\omega^2}\right)_{\omega_0}$ en fonction de a , z , ω_0 , c et l'angle de diffraction θ_0 . Faire l'application numérique et calculer ensuite la durée τ_0 .

22. En tenant compte du déphasage $\Delta\phi$, reconstituer le profil temporel du champ électrique de l'impulsion lumineuse au niveau du plan (P), c'est-à-dire calculer l'expression du champ électrique complexe $E'(t)$.

23. En déduire le module de ce champ.

24. Donner la largeur temporelle τ_P de l'impulsion au plan (P).

25. Application : on envoie une impulsion lumineuse dans ce dispositif telle que $\tau = 100 \times 10^{-15}$ s. Calculer la durée de l'impulsion τ_P .

Problème n° 2 – Circuit secondaire d'une centrale nucléaire

CCP MP 2007

A. Étude du système liquide-vapeur

L'équilibre entre l'eau liquide et sa vapeur est caractérisé, à différentes températures, par les données suivantes :

θ °C	p_s bar	Liquide saturant		Vapeur saturante	
		v_L m ³ · kg ⁻¹	h_L kJ · kg ⁻¹	v_G m ³ · kg ⁻¹	h_G kJ · kg ⁻¹
35	0,056	$1,00 \times 10^{-3}$	146,34	25,24	2560,67
50	0,123	$1,01 \times 10^{-3}$	208,96	12,04	2587,42
100	1,013	$1,04 \times 10^{-3}$	418,42	1,673	2671,44
185	11,238	$1,13 \times 10^{-3}$	784,17	0,174	2778,03
285	69,200	$1,35 \times 10^{-3}$	1261,11	0,028	2768,83

avec θ la température en degré CELSIUS, p_s la pression de vapeur saturante, v_L le volume massique du liquide saturant, h_L l'enthalpie massique du liquide saturant, v_G le volume massique de la vapeur saturante et h_G l'enthalpie massique de la vapeur saturante.

1. On désigne par p la pression du système liquide-vapeur et par v son volume massique. Représenter l'allure du diagramme de CLAPEYRON (p, v) de l'eau. On prendra soin de préciser la position du point critique C , les domaines liquide L , liquide et vapeur $L + V$ et vapeur V .

2. Représenter, sur le diagramme précédent : l'allure de l'isotherme critique T_C et préciser ses caractéristiques, et l'allure d'une isotherme $T < T_C$ pour laquelle on justifiera la présence d'un palier.

3. On rappelle que le titre massique en vapeur x d'un système liquide-vapeur est égal au rapport entre la masse m_G d'eau à l'état de vapeur saturante et la masse totale m du système. On désigne respectivement par v_m et h_m le volume massique et l'enthalpie massique du système liquide-vapeur. Montrer que le titre en vapeur x est donné par l'une quelconque des relations ci-dessous :

$$x = \frac{v_m - v_L}{v_G - v_L} \quad \text{et} \quad x = \frac{h_m - h_L}{h_G - h_L}$$

4. On désigne par $l_v(T)$ la chaleur latente massique de vaporisation à la température T . Rappeler la relation liant $l_v(T)$ à $h_G(T)$ et $h_L(T)$.

B. Détente adiabatique réversible d'un système liquide-vapeur

On dispose d'un cylindre indéformable muni d'un piston. Le cylindre et le piston ont des parois calorifugées. L'entropie massique d'un système liquide vapeur, de titre massique en vapeur x , en équilibre à la température T est donnée par la relation : $s(x, T) = c_L \ln T + \frac{x l_v(T)}{T} + \text{Cte}$, dans laquelle c_L désigne la capacité thermique massique du liquide saturant. Le piston est, initialement, fixé dans une position qui délimite un volume $V = 10 \text{ L}$ dans le cylindre. L'introduction d'une masse $m = 10 \text{ g}$ d'eau dans le cylindre permet d'obtenir un système liquide-vapeur en équilibre à la température $\theta = 100 \text{ }^\circ\text{C}$.

5. Calculer le titre massique en vapeur x de ce système.

6. On fait subir au système liquide-vapeur défini ci-dessus une détente adiabatique réversible de la température θ à la température $\theta' = 50 \text{ }^\circ\text{C}$. Sachant que c_L reste constante au cours de cette détente et égale à $4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, calculer le titre massique en vapeur x' du système liquide-vapeur à la fin de la détente.

7. Quel titre massique en vapeur x' aurait-on dû avoir, à la température $\theta = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, pour qu'au cours de la détente définie ci-dessus, ce titre reste constant ?

Dans la suite du problème, tous les calculs se rapportent à une masse $m = 1 \text{ kg}$ de fluide. La capacité thermique massique c_L du liquide est constante et vaut $4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Le coefficient de dilatation isobare α de l'eau liquide, supposé constant, vaut $1,5 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

C. Modèle de fonctionnement d'une turbine à vapeur. Cycle de Rankine

Le circuit secondaire d'une centrale nucléaire comporte les éléments suivants : un générateur de vapeur, une turbine, un condenseur et une pompe d'alimentation 1. Voir la figure 5.

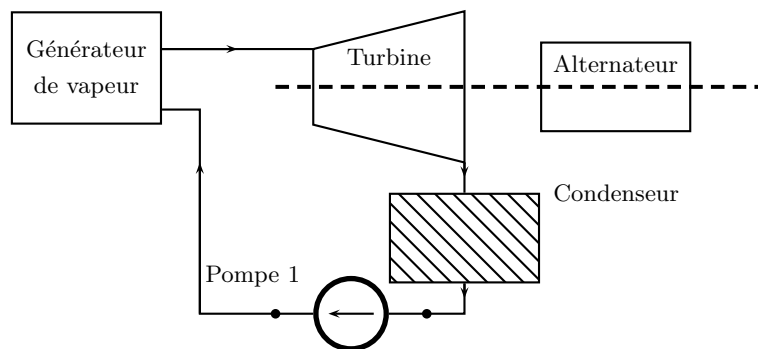


FIG. 5 – Circuit secondaire

Les transformations subies par l'eau dans ce circuit sont modélisées par le cycle de RANKINE décrit ci-dessous :

- $A \rightarrow B$: compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation 1, de la pression $p_1 = 0,056 \text{ bar}$ à la pression $p_2 = 69,200 \text{ bar}$, du liquide sortant du condenseur à la pression p_1 (état A). Cette compression entraîne une élévation ΔT de la température du liquide.
- $B \rightarrow D$: échauffement isobare du liquide dans le générateur de vapeur qui amène le liquide de l'état B à l'état de liquide saturant sous la pression p_2 (état D).

- $D \rightarrow E$: vaporisation totale, dans le générateur de vapeur, sous la pression p_2 .
- $E \rightarrow F$: détente adiabatique réversible, dans la turbine de p_2 à p_1 .
- $F \rightarrow A$: liquéfaction totale, dans le condenseur, sous la pression p_1 , de la vapeur présente dans l'état F .

8. Représenter le cycle décrit par l'eau dans le diagramme de CLAPEYRON (p, v).

9. La différentielle de l'entropie massique du liquide s'écrit, en fonction des variables T et p : $ds = c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L dp$. On note $\Delta T = T - T_1$ l'élévation de température du liquide dans la pompe d'alimentation. Sachant que $\Delta T \ll T_1$, calculer ΔT . On supposera, pour ce calcul, que le liquide est incompressible et que son volume massique v_L vaut $10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$. Dans la suite du problème, on négligera ΔT .

10. Calculer le titre x_F et l'enthalpie massique h_{mF} du système liquide-vapeur sortant de la turbine (état F).

11. Calculer les quantités d'énergie Q_1 et Q_2 reçues par 1 kg d'eau, par transfert thermique, respectivement dans le condenseur et dans le générateur de vapeur.

12. Calculer le travail W reçu, par 1 kg de fluide, au cours du cycle.

13. Calculer l'efficacité ρ (ou rendement thermodynamique) du cycle. Comparer cette efficacité à celle ρ_c d'un cycle de CARNOT décrit entre les températures extrêmes T_1 , et T_2 .

14. Calculer la variation d'enthalpie Δh_{AB} du liquide au cours de la compression AB . On supposera, pour ce calcul, que le liquide est incompressible et que son volume massique v_L vaut $10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

15. Dans le calcul du bilan enthalpique du fluide au cours du cycle, on peut négliger la variation d'enthalpie Δh_{AB} . Montrer, alors que le travail W peut s'exprimer en fonction des enthalpies massiques du fluide à l'entrée et à la sortie de la turbine.

D. Cycle de Rankine avec soutirage

On se propose de modifier l'installation par l'adjonction d'une deuxième turbine et la pratique du soutirage qui a pour but de réchauffer le liquide avant qu'il soit réinjecté dans le générateur de vapeur. La pratique du soutirage consiste à prélever, à la sortie de la première turbine, sous la pression $p' = 11,238$ bar, une masse m' de vapeur saturante. Cette vapeur est envoyée dans un réchauffeur où elle est mise en contact, par l'intermédiaire d'un échangeur, avec la masse $m - m'$ de liquide saturant, issue du condenseur, qui a été, préalablement, comprimée de p_1 à p' par la pompe d'alimentation 1. Voir la figure 6.

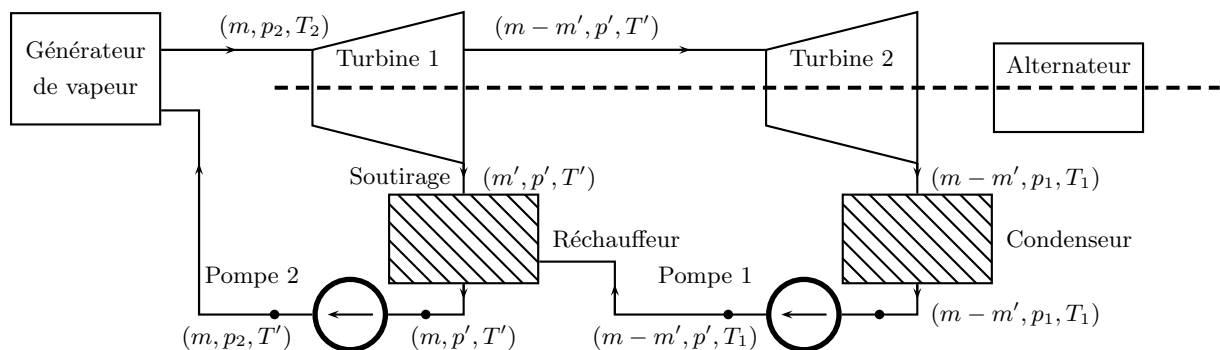


FIG. 6 – Circuit secondaire avec soutirage

Au cours de cette opération la masse m' de vapeur saturante se liquéfie sous la pression constante p' . L'énergie ainsi libérée est entièrement utilisée pour réchauffer la masse $m - m'$ de liquide de la température T_1 , atteinte à la sortie du condenseur, à la température T' . À la sortie du réchauffeur le fluide se trouve à l'état liquide dans les conditions T' , p' . Une pompe de reprise 2 comprime ce liquide, de manière adiabatique, de p' à p_2 puis le refoule dans le générateur de vapeur où il subit un échauffement isobare de T' à T_2 avant de se vaporiser de nouveau.

16. Représenter le cycle de RANKINE avec soutirage dans le diagramme de CLAPEYRON (p, v).

À partir d'un bilan enthalpique traduisant les transferts thermiques entre la vapeur saturante et le liquide dans le réchauffeur, calculer m' .

17. Calculer le titre x'_1 et l'enthalpie massique h'_1 du système liquide-vapeur à la fin de la première détente et avant soutirage.

18. Calculer le titre x_2 et l'enthalpie H_2 du système liquide-vapeur à la fin de la deuxième détente.

19. On adopte l'approximation suggérée à la question 15 de la partie précédente. Calculer le travail total W , reçu, par 1 kg de fluide au cours d'un cycle avec soutirage.

20. Calculer l'efficacité ρ_s (ou rendement) du cycle avec soutirage. Conclure.