Devoir de Sciences Physiques n°2 pour le 05-10-2007

Problème n° 1 – Plasmons dans les métaux II

ENS MPI 2007

`Ce problème est à traiter dans la continuité de celui du DM1.`

Ce problème porte sur les phénomènes liés aux oscillations collectives des électrons libres dans le volume et à la surface des métaux. Ces oscillations, nommées *plasmons*, sont à l'origine de nombreuses applications en physique, chimie et biologie.

On considérera que du point de vue de la propagation des ondes électromagnétiques l'air se comporte comme le vide et que le métal est non-magnétique. Dans tout le problème, un métal sera modélisé par un milieu isotrope homogène conducteur, de conductivité statique γ_0, comprenant par unité d volume N électrons mobiles dans un réseau fixe d'atomes. Seul un électron par atome participe à la conduction dans le métal. Chacun de ces électrons est assimilé à une particule de masse m et de charge $-e$ libre de se mouvoir, les interactions subies se limitant à des chocs dont on ne cherchera pas à préciser la nature.

Données :
Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F · m^{-1}
Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H · m^{-1}
Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J · K^{-1}
Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J · s et $\hbar = h/2\pi$
Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Masse de l'électron : $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg
Masse molaire atomique de l'or : $M = 197$ g · mol^{-1}
Masse volumique de l'or : $d = 19,3$ g · cm^{-3}
Conductivité statique de l'or : $\gamma_0 = 45,5 \times 10^6$ S · m^{-1}
Notation des nombres complexes : $i^2 = -1$
Relation d'analyse vectorielle : $\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{U}) = \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{U} - \Delta\mathbf{U}$

A. Plasmons dans un métal

Dans cette partie, on modélise les collisions subies par les électrons par une force de frottement fluide $-m\mathbf{v}/\tau$ introduite dans la partie précédente, $\mathbf{v}$ étant la vitesse de l'électron et τ la constante de temps des collisions. Le champ électrique appliqué au métal est maintenant dépendant du temps et s'écrit $\mathbf{E}(t)$.

1. Montrer que s'il existe à l'instant $t = 0$ une densité volumique de charges ρ_0 en un point du conducteur de conductivité γ_0, celle-ci disparaît très rapidement. On calculera le temps de relaxation correspondant.

2. Dans un régime forcé dans lequel le champ appliqué au métal est sinusoïdal et s'écrit en notation complexe $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp i\omega t$, déterminer la vitesse d'un électron en régime permanent. En déduire, à partir de la loi d'Ohm locale, que la conductivité $\gamma(\omega)$ complexe en régime variable s'écrit :

$$\gamma(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

3. Montrer que ce régime autorise pour la densité de charge $\rho(t)$ des oscillations amorties dont on donnera la pseudo-pulsation ainsi que le temps de décroissance en fonction de τ et de la pulsation $\omega_p = \sqrt{\gamma_0/\varepsilon_0\tau}$. Celle-ci est appelée pulsation plasmon par analogie à la pulsation plasma dans les gaz.

4. En comparant les ordres de grandeur de ω_p et $1/\tau$, commenter le comportement de $\rho(t)$.

5. La pulsation plasmon provient d'une oscillation spatiale des charges propre au métal dont on peut retrouver l'origine en l'assimilant à un gaz d'électrons de densité $-Ne$ se superposant à un support de charges positives de densité Ne. Justifier que l'on peut considérer les ions du métal comme fixes par rapport aux électrons. Montrer que sous l'action d'un déplacement δx du gaz d'électrons dans la direction x, il se crée un champ électrique induit que l'on exprimera en fonction de N, e et δx.

6. Retrouver la pulsation propre des oscillations du gaz d'électrons sous la forme $\omega_p = \sqrt{Ne^2/m\varepsilon_0}$. On notera que dans cette oscillation, ρ reste nul à l'intérieur du métal. Seule une charge surfacique apparaît à la surface du métal.

B. Couplage champ-plasmons – Propagation

Dans cette partie, on étudie le couplage d'une onde électromagnétique avec les oscillations plasmons décrites dans la partie précédente. Le conducteur métallique est parcouru par une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ suivant le sens positif de l'axe z. On notera le champ électrique complexe associé à cette onde : $\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 \exp\left[i\left(\omega t - kz\right)\right]$. On négligera l'effet du champ magnétique sur le mouvement des électrons de telle manière que l'expression $\gamma(\omega)$ donnée à la question 2 reste valable.

7. À partir des équations de Maxwell, démontrer la relation de dispersion du vecteur d'onde :

$$k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\frac{\gamma(\omega)}{\omega\varepsilon_0}\right)$$

8. On suppose dans un premier temps que la pulsation de l'onde est faible devant la fréquence des collisions dans le métal de telle manière que $\omega \ll 1/\tau$. Justifier pourquoi la conductivité est la même qu'à champ d'excitation constant. À quelle longueur d'onde dans le vide ce domaine de fréquences correspond-il ?

9. En utilisant une expression simplifiée pour $k(\omega)$, montrer que dans ces conditions le champ s'écrit :

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 \exp -\frac{z}{\delta} \exp i(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

Exprimer la profondeur de pénétration δ en fonction de γ_0, ω et μ_0. Représenter graphiquement la dépendance en z de l'amplitude spatiale du champ (en considérant $z = 0$ à l'entrée du métal). Calculer δ pour des ondes de fréquences 50 Hz et 100 MHz.

10. On se place maintenant dans le cas où $\omega \gg 1/\tau$. Montrer qu'en première approximation : $k^2(\omega) = \omega^2/c^2 - \omega_p^2/c^2$. Sous quelle condition l'onde peut-elle se propager dans le métal ?

11. Dans le domaine de fréquence dans lequel il n'y a pas de propagation, donner l'expression de la distance de pénétration δ_p dans le métal en fonction de ω, ω_p et c. Calculer cette distance pour une fréquence dans le visible.

C. Plasmons de surface sur un métal

On étudie dans cette partie, l'effet des oscillations électroniques à la surface d'un métal sur la propagation des ondes électromagnétiques. De la même manière que précédemment, il n'y a pas d'accumulation de charges à l'intérieur du métal. On considère une interface entre le métal occupant l'espace $z > 0$ et l'air occupant l'espace $z < 0$. Sur cette interface, on cherche les ondes électromagnétiques sous la forme d'ondes planes inhomogènes de champs électrique et magnétique complexes :

$$\mathbf{E}_\ell(x,z,t) = \mathbf{E}_\ell(z)\exp\left[i\left(\omega t - k_x x\right)\right] \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_\ell(x,z,t) = \mathbf{B}_\ell(z)\exp\left[i\left(\omega t - k_x x\right)\right]$$

avec $\ell = 1$ dans l'air et $\ell = 2$ dans le métal. k_x est la composante suivant x du vecteur d'onde dans les deux milieux et $\mathbf{E}_\ell(z)$ l'amplitude spatiale du champ.

12. Exprimer dans le présent les équations de MAXWELL satisfaites par les champs électriques et magnétiques dans l'air et le métal de conductivité $\gamma(\omega)$.

13. On suppose que les champs $\mathbf{E}_\ell(z)$ ($\ell = 1, 2$) sont polarisés dans le plan (x, z). Montrer qu'alors le champ magnétique associé $\mathbf{B}_\ell(z)$ est dirigé suivant l'axe y, et que le problème se ramène à la recherche de la fonction scalaire $E_{\ell x}(z)$ dans chacun des deux milieux.

14. Montrer que $E_{\ell x}(z)$ vérifie l'équation différentielle pour $\ell = 1, 2$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_{\ell x}(z)}{\mathrm{d}z^2} - (k_x^2 - \omega^2\mu_0\epsilon_\ell)E_{\ell x}(z) = 0$$

avec $\epsilon_1 = \varepsilon_0$ la permittivité de l'air et $\epsilon_2 = \varepsilon_0 - i\gamma(\omega)/\omega$ celle du métal.
Dans toute la suite, on considère les ondes de pulsation ω telle que $\omega \gg 1/\tau$. Montrer qu'alors ϵ_2 est réel.

15. Montrer que le forme générale des solutions de cette équation différentielle s'écrit : $E_{\ell x}(z) = \alpha_\ell \exp z/\delta_\ell + \beta_\ell \exp -z/\delta_\ell$ pour $\ell = 1, 2$, avec des constantes δ_ℓ dont on donnera l'expression en fonction de k_x et ϵ_ℓ.

16. On cherche des solutions sous la forme d'ondes de surface : ces ondes se propagent dans la direction x, restent confinées au voisinage $z = 0$ de part et d'autre de l'interface $(1-2)$, et s'annulent pour z infini. Montrer qu'alors nécessairement δ_ℓ est réel. On choisit δ_ℓ positif pour $l = 1, 2$: donner l'expression simplifiée de $E_{\ell x}(z)$ pour $\ell = 1, 2$.

17. Donner la forme des autres composantes $E_{\ell z}(z)$ et $B_{\ell y}(z)$. Quel est l'état de polarisation du champ électrique dans le plan (x, z) ?

18. Représenter la dépendance en x es amplitudes des vecteurs $\mathbf{E}_\ell$ de chaque côté de l'interface. Représenter de même l'amplitude de la moyenne temporelle du vecteur de POYNTING $< \mathbf{\Pi}_\ell > (x, z)$ en fonction de x puis de z.

19. On admet que dans la description présente il n'y a pas lieu d'introduire de courant de surface. En utilisant les relations de continuité des champs sur l'interface $z = 0$, montrer que :

$$\epsilon_1\delta_1 + \epsilon_2\delta_2 = 0$$

En déduire le signe de ϵ_2.

20. Montrer que la relation de dispersion liant k_x à ω s'écrit :

$$k_x^2(\omega) = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}\mu_0\omega^2$$

21. Exprimer $k_x^2(\omega)$ en fonction de ω, ω_p et c. En prenant en compte les caractéristiques des ondes de surface définies à la question 16, en déduire le domaine de fréquences autorisant la propagation d'une telle onde le long de l'interface $(1-2)$. Donner les expressions des profondeurs de pénétration de l'onde $\delta_\ell(\omega,\omega_p)$ $(\ell = 1,2)$ de part et d'autre de l'interface et calculer ces distances pour une longueur d'onde dans le vide de 500 nm.

22. Représenter graphiquement $k_x(\omega)$ dans le domaine de fréquences défini à la question 21. Discuter les cas : $\omega \ll \omega_p$, $\omega \to \omega_p/\sqrt{2}$.

23. La solution à la pulsation $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$ est appelée pulsation propre du plasmon de surface. En étudiant la limite du rapport $E_{\ell x}(z=0)/E_{\ell z}(z=0)$ pour $\omega \to \omega_p/\sqrt{2}$, donner la polarisation de cette onde dans le plan (x,z).

Problème n^o 2 – Approche d'un projecteur de diapositives *CCP PSI 2007*

Dans l'ensemble de ce problème, on supposera qu'on se trouve dans les conditions de Gauss.

A. Préambule

1. On considère un pinceau lumineux convergent arrivant sur la lentille divergente de la figure 1 du document réponse proposé. Tracer le pinceau lumineux au-delà de cette lentille.

2. On considère un système optique constitué (de gauche à droite) de deux lentilles minces convergentes $(C1)$ et $(C2)$ coaxiales de distance focale respective f'_1 et $f'_2 = f'_1/3$. Quelles sont les conditions pour qu'un faisceau incident parallèle entrant dans la lentille $(C1)$ induise un faisceau parallèle sortant de la lentille $(C2)$? Argumenter la réponse.

3. Faire le tracé d'un faisceau incident constitué de rayons parallèles faisant un angle α avec l'axe optique.

4. Établir l'expression du rapport G (défini positif) des largeurs des faisceaux d'un tel système optique.

5. Le faisceau incident faisant un angle α avec l'axe optique, exprimer l'angle α' du faisceau sortant en fonction de G et de α. Commenter le signe.

6. On considère maintenant un système optique constitué (de gauche à droite) de deux lentilles minces $(C1)$ et $(D2)$ coaxiales de distance focale respective f'_1 et f'_2. La lentille $(C1)$ est convergente, la lentille $(D2)$ est divergente. Quelles sont les conditions pour qu'un faisceau incident parallèle entrant dans la lentille $(C1)$ induise un faisceau parallèle sortant de la lentille $(D2)$? Argumenter votre réponse.

7. Faire le tracé correspondant avec un faisceau de rayons parallèles faisant un angle α avec l'axe optique.

8. Établir l'expression du rapport G' (défini positif) des largeurs des faisceaux d'un tel système optique.

9. Le faisceau incident faisant un angle α avec l'axe optique, exprimer l'angle α' du faisceau sortant en fonction de G' et de α. Commenter le signe.

10. Le faisceau sortant est-il toujours formé de rayons parallèles ?

B. Conception d'un projecteur de diapositives

On cherche à concevoir un projecteur de diapositives (24 mm $\times$ 36 mm) permettant d'obtenir une image de $1,20$ m de large sur un écran situé en E à $\ell = 3$ m du centre optique de la lentille mince $(C1)$ pour une diapositive horizontale. Dans cette partie du problème, on notera e la distance $\overline{IF}$ et m la distance $\overline{F'E}$. Comme on peut le voir sur la figure 2 du document réponse, la source lumineuse réelle étendue a été remplacée par une source ponctuelle située en S.

11. Quel est le grandissement γ nécessaire ? Commenter le signe.

12. Dans un premier temps, on utilise le montage de la figure 2 qui comprend une source lumineuse située en S sur l'axe optique, placée en amont d'un diaphragme et d'un diffuseur épais. La diapositive sera insérée, centrée en I sur l'axe optique juste devant le diffuseur. L'objectif est constitué d'une lentille convergente de focale $f' = \overline{OF'} = -\overline{OF}$ centrée sur l'axe optique en O. Quel est l'intérêt du diffuseur épais ?

13. Tracer sur la figure 2 du document réponse G' et D' les images des points G et D représentant respectivement les bords gauche et droit de la diapositive. Dans quel sens faut-il monter la diapositive ? Justifier votre réponse.

14. Déterminer les expressions de e, m, f' en fonction du grandissement γ et de ℓ. Réaliser l'application numérique pour le grandissement souhaité.

15. On souhaite en plus pouvoir obtenir une image nette par déplacement de l'objectif pour des distances comprises entre 2 m et 5 m. Quelles sont les grandissements et largeurs d'images horizontales correspondant à ces deux limites ?

16. Quelles sont les limites de déplacement de la lentille $(C1)$ entre O_{min} et O_{max} (donner $\overline{IO}_{min}$ et $\overline{IO}_{max}$) ? Quelle est la course nécessaire pour l'objectif ?

17. Quel intérêt/inconvénient voyez-vous à utiliser toute la surface de la lentille ?

C. Projecteur de seconde génération

Pour réaliser un projecteur de seconde génération, on interpose une lentille ($C0$) convergente entre la lampe et le diaphragme du montage précédent. Cette lentille est en général épaisse, mais pour les besoins du problème on supposera qu'elle est mince et qu'on se trouve toujours dans les conditions de Gauss. On remplace le diffuseur par un verre parfaitement transparent permettant de séparer thermiquement les deux parties du projecteur. On supposera malgré tout qu'il est suffisamment fin pour négliger le décalage des rayons lumineux qu'il induit. Voir la figure 3 dans le document réponse.

18. On a placé la lentille convergente ($C0$) de manière à ce que le pinceau lumineux issu de S englobe toute la largeur de la diapositive et se focalise en O, centre optique de la lentille ($C1$). Sur la figure 3 du document réponse :
- tracer l'enveloppe du pinceau lumineux entre S et E (définie par les rayons limites),
- construire les images G' et D' de G et D respectivement (commentaire),
- indiquer explicitement la position du plan focal image de ($C0$).

19. Donner la relation entre la distance focale image f'_0 de ($C0$) et $\overline{O'O}$ pour un grandissement transversal associé à ($C0$) $G_t = -4$.

20. Pour des raisons d'encombrement, on est contraint de fixer la distance $\overline{SI}$ à 5 cm. En déduire la valeur de la distance $\overline{SO'}$ pour une image nette pour une distance $\ell = 200$ cm.

21. Quelle est alors la valeur de la distance focale de la lentille ($C0$) ?

22. Dans le cadre des conditions aux limites imposées pour le réglage de la netteté dans la partie précédente, on a prévu de pouvoir déplacer la lentille ($C1$) entre O_{min} et O_{max} déterminés à la question 16. Ceci implique un mouvement conjugué de ($C0$) entre les positions O'_{min} et O'_{max}. Donner les distances $\overline{SO'}_{min}$ et $\overline{SO'}_{max}$ correspondantes de manière à toujours respecter les conditions explicitées à la question 18.

23. Quelle est la relation entre la course $\Delta SO'$ de la lentille ($C0$) et la course ΔIO de la lentille ($C1$) ? Application numérique.

24. Doit-on toujours mettre la diapositive dans le même sens ? Commenter.

25. Quels sont les avantages à placer ($C1$) au point conjugué de S par ($C0$) ?

DOCUMENT – RÉPONSE

Nom : Prénom :

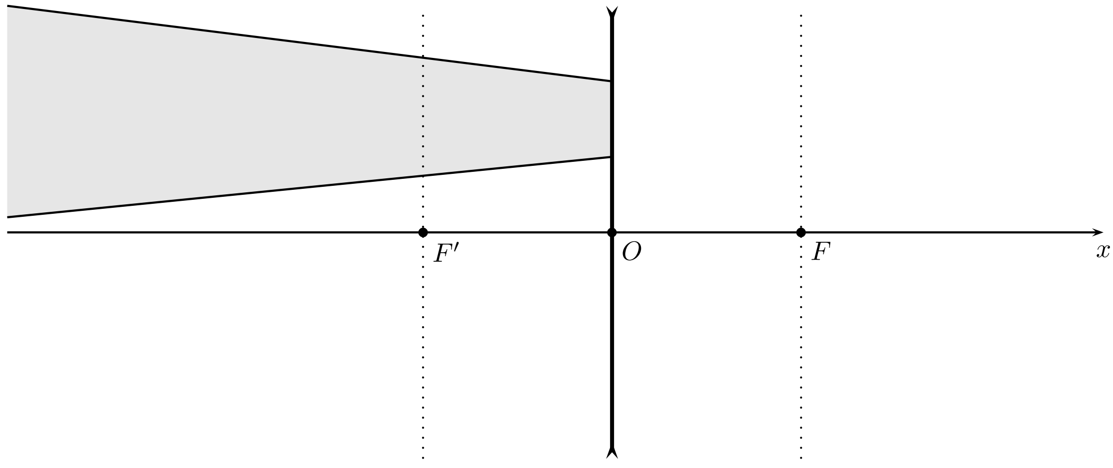

Fig. 1 – Lentille divergente

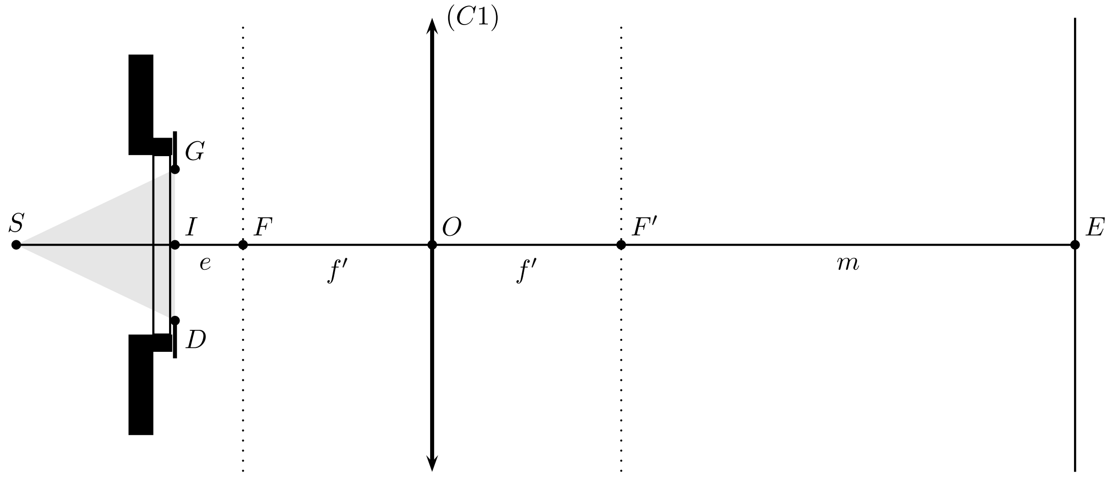

Fig. 2 – Projecteur de première génération

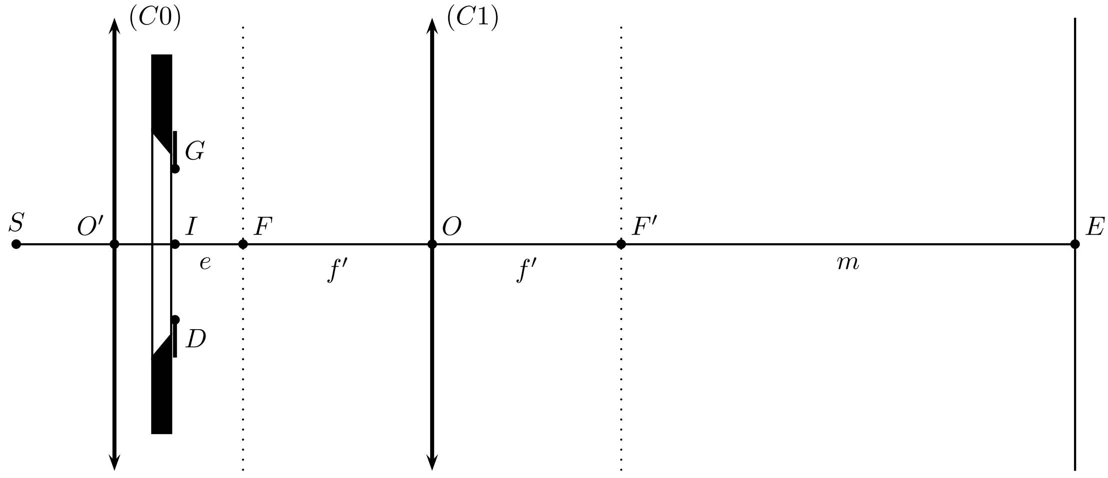

Fig. 3 – Projecteur de seconde génération