

Devoir de Sciences Physiques n°1 pour le 14-09-2007

Problème n° 1 – Détecteurs de véhicules à boucle inductive

Centrale PSI 2007

Les détecteurs de véhicules dits à boucle inductive sont actuellement de loin les plus répandus, tant pour le contrôle des flux sur autoroutes que pour la détection automatique pour le déclenchement de feux tricolores ou de barrières de sécurité. Le principe de fonctionnement d'un détecteur à boucle inductive est le suivant : un enroulement de fil électrique placé dans une tranchée rectangulaire en travers de la chaussée est relié à une borne contenant un oscillateur quasi-sinusoïdal. Ce dernier génère dans la boucle un courant sinusoïdal à l'origine du phénomène d'induction électromagnétique. Lorsque qu'un véhicule est à proximité immédiate de la boucle, le coefficient d'inductance de cette boucle est modifié et donc la fréquence de l'oscillateur aussi. Un fréquencemètre permet ainsi de détecter le véhicule passant au-dessus de la boucle.

A. Étude de l'oscillateur quasi-sinusoïdal

La boucle rectangulaire enterrée dans la chaussée est constituée de plusieurs tours (généralement compris entre 3 et 5). Son schéma électrique équivalent est celui représenté sur la figure 1. L , R_b et C_b représentent respectivement l'inductance, la résistance et la capacité de la boucle.

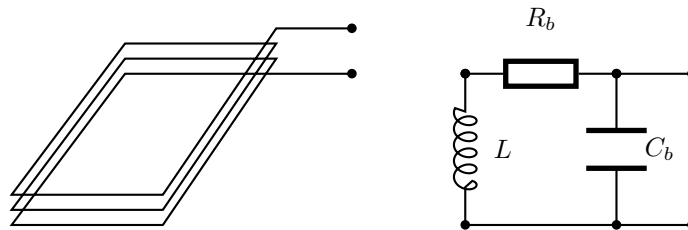


FIG. 1 – Modélisation de la boucle inductive

La résistance R_b modélise l'ensemble des pertes engendrant une dissipation d'énergie du fait du passage d'un courant dans la boucle enterrée. On peut distinguer dans R_b deux contributions : une provenant du câble lui-même et une autre provenant de son environnement.

1. Quel phénomène est à l'origine de la dissipation d'énergie dans le câble ?

Simulation d'une résistance négative

Pour compenser les pertes dues à la résistance R_b , l'oscillateur doit comporter une source d'énergie. Pour cela, on utilise le dipôle de la figure 2.

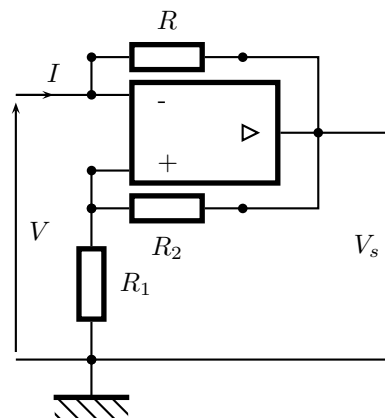


FIG. 2 – Résistance négative

2. Dans le cas où l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, déterminer les relations donnant V en fonction de I et V_s en fonction de I .

3. Dans le cas où l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime saturé avec $V_s = +V_{sat}$, déterminer la relation donnant V en fonction de I . Faire de même si $V_s = -V_{sat}$.

4. Tracer la caractéristique statique V en fonction de I du dipôle de la figure 2. Montrer que dans un intervalle donné de V : $V \in [-V_0, V_0]$ le circuit se comporte comme une résistance négative de valeur $-R_n$ avec $R_n > 0$. Exprimer R_n et V_0 en fonction de R_1 , R_2 , R et V_{sat} .

Étude de l'oscillateur

L'oscillateur est constitué par la mise en parallèle de la boucle inductive enterrée, d'un condensateur de capacité C_s et du dipôle étudié à la question précédente. On suppose que ce dernier est en régime linéaire de sorte que l'on peut l'assimiler à une résistance négative $-R_n$. On peut ainsi dessiner le schéma électrique équivalent de l'oscillateur, représenté sur la figure 3.

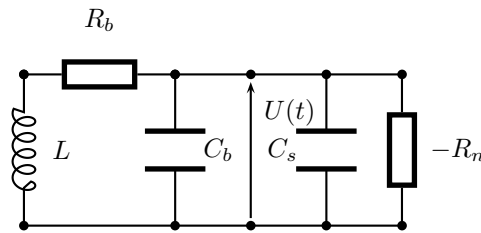


FIG. 3 – Circuit complet

5. Justifier que l'on puisse remplacer les deux condensateurs par un seul de capacité C_{eq} dont on donnera l'expression en fonction de C_b et C_s .

6. Montrer que la tension $U(t)$ aux bornes de la boucle vérifie une équation différentielle de la forme :

$$a \frac{d^2 U}{dt^2} + b \frac{dU}{dt} + (1 - c)U(t) = 0$$

Donner l'expression de a , b et c en fonction de L , C_{eq} , R_b et R_n .

7. Quelle est la condition nécessaire sur b pour que les solutions de l'équation différentielle soient sinusoïdales ? En déduire la valeur à fixer à R_n en fonction de R_b et Q , avec :

$$Q = \frac{1}{R_b} \sqrt{\frac{L}{C_{eq}}}$$

8. Montrer que les solutions sont effectivement des sinusoïdes si $Q > Q_{lim}$, inégalité que l'on supposera vérifiée pour la suite. Que vaut Q_{lim} ?

9. Calculer la fréquence f des oscillations en fonction de L , C_{eq} et Q .

En pratique, la condition $Q > Q_{lim}$ n'est pas suffisante pour assurer une bonne stabilité et une bonne fiabilité du montage. La valeur de Q minimale recommandée est de l'ordre de 8.

10. En déduire dans ce cas que l'on peut écrire la relation approchée :

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC_{eq}}}$$

avec une erreur relative inférieure à 1%.

On désire que la fréquence d'oscillation f soit de 50 kHz avec une boucle enterrée ayant une inductance $L = 150 \times 10^{-6}$ H, une capacité $C_b = 10$ nF et une résistance $R_b = 0,7 \Omega$.

11. Calculer la valeur de la capacité C_s à intégrer dans le circuit oscillant. La valeur de Q est-elle satisfaisante ? En pratique, la condition $b = 0$ ne permet pas d'amorcer les oscillations.

12. Quel est le signe de b permettant l'amorçage de l'oscillateur ? R_n doit-il ainsi être plus petit ou plus grand que $Q^2 R_b$?

13. Par quoi est limitée l'amplitude des oscillations générées par le circuit ?

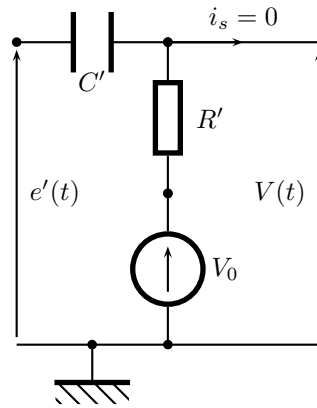
B. Étude du fréquencemètre

Les fréquencemètres actuels sont majoritairement numériques. Cette partie étudie le fonctionnement d'un fréquencemètre de type analogique qui va permettre de mesurer les variations de fréquence de l'oscillateur dues à la présence d'un véhicule au-dessus de la boucle enterrée permettant ainsi sa détection. Pour l'ensemble des chronogrammes demandés, il est recommandé de faire figurer les éléments qui vous semblent importants (valeurs particulières, tangentes...).

Étude d'une cellule $R'C'V_0$

On considère le montage de la figure 4, où V_0 symbolise un générateur de tension continue. On suppose nul le courant de sortie i_s .

14. Déterminer l'équation différentielle reliant $e'(t)$ et $V(t)$.

FIG. 4 – Cellule $R'C'V_0$

On s'intéresse à la réponse à une discontinuité de tension : $e'(t) = +E$ pour $t < 0$, $e'(t) = -E$ pour $t > 0$. On suppose que $E > V_0/2$ et l'on se place en régime permanent pour $t < 0$.

15. Que vaut $V(t)$ pour $t < 0$? Que vaut $V(t = 0^+)$ (on précisera également son signe) ?

16. Déterminer pour $t > 0$ l'expression du signal de sortie $V(t)$ de la cellule $R'C'V_0$ attaquée par cette discontinuité de tension.

17. Dessiner sur un même graphe les évolutions de $e'(t)$ et $V(t)$.

Étude du module d'entrée du fréquencemètre

On considère le module d'entrée du fréquencemètre représenté sur la figure 5. Il est attaqué par un signal sinusoïdal $e(t)$ de fréquence f avec $f \ll 1/R'C'$. Par ailleurs, la tension continue du générateur est réglée telle que $0 < V_0 < 2V_{sat}$.

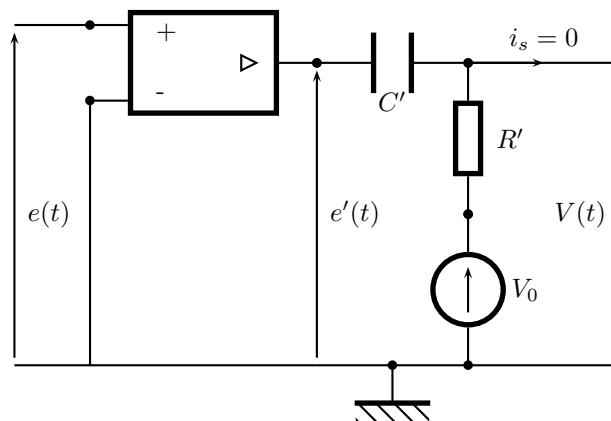


FIG. 5 – Module d'entrée du fréquencemètre

18. Dessiner sur un même graphe les chronogrammes représentant les évolutions de $e(t)$, $e'(t)$ et $V(t)$ sur une durée supérieure à une période.

Étude du module de sortie

On considère le module de sortie du fréquencemètre représenté sur la figure 6.

19. L'amplificateur opérationnel fonctionne-t-il en mode linéaire ou non ? Justifier votre réponse.

On suppose qu'à $t = 0$, la charge du condensateur est terminée. On attaque ce module par le signal $U(t)$ de période T , formé d'impulsions rectangulaires alternatives (avec la double inégalité $0 < V_0 < 2V_{sat}$) :

$$\begin{cases} U(t) = -2V_{sat} + V_0 & 0 < t < \tau \\ U(t) = V_0 & \tau < t < T/2 \\ U(t) = 2V_{sat} + V_0 & T/2 < t < T/2 + \tau \\ U(t) = V_0 & T/2 + \tau < t < T \end{cases}$$

On suppose par ailleurs que $\tau \ll RC$.

20. Que vaut la tension en sortie $S(t = 0^-)$ juste avant le front descendant de l'entrée $U(t)$.

21. Montrer que la sortie de l'amplificateur opérationnel bascule entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$. Que vaut $V^+(t = 0^+)$? Puisque $\tau \ll RC$, la tension V^+ n'a quasiment pas varié entre les dates $t = 0^+$ et $t = \tau$.

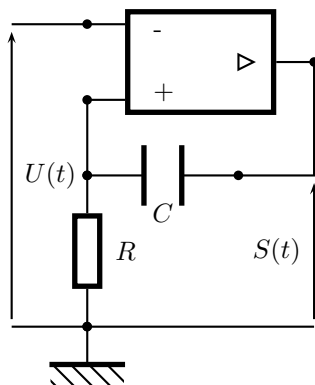


FIG. 6 - Module de sortie du fréquencemètre

- 22. La sortie de l'amplificateur opérationnel bascule-t-elle à nouveau entre $t = \tau^-$ et $t = \tau^+$?
- 23. Étape 1 : $0 < t < t_1$ (l'instant t_1 est défini à la question suivante). Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $V^+(t)$ pour $0 < t < t_1$ et la résoudre.
- 24. Calculer la date de basculement de la tension $S(t)$, notée t_1 , en fonction de V_{sat} , V_0 , R et C . Préciser la valeur de la tension $V^+(t = t_1^+)$ juste après la date t_1 .
- 25. Étape 2 : $t_1 < t < T$. Donner l'expression de $V^+(t)$ dans l'étape 2 définie par $t_1 < t < T/2$.
- 26. L'impulsion rectangulaire positive entre $t = T/2$ et $T/2 + \tau$ envoyée en entrée fait-elle une nouvelle fois basculer la sortie de l'amplificateur opérationnel ?
- 27. Établir les trois chronogrammes représentant les trois graphes $V^-(t)$, $V^+(t)$ et $S(t)$ sur une période complète T .
- 28. La forme rectangulaire des impulsions alternatives est-elle déterminante pour le fonctionnement du module de sortie ?

Étude du fréquencemètre analogique

On considère le fréquencemètre analogique décrit sur la figure 7. On envoie en entrée un signal $e(t)$ sinusoïdal de fréquence f : $e(t) = E^* \cos 2\pi ft$.

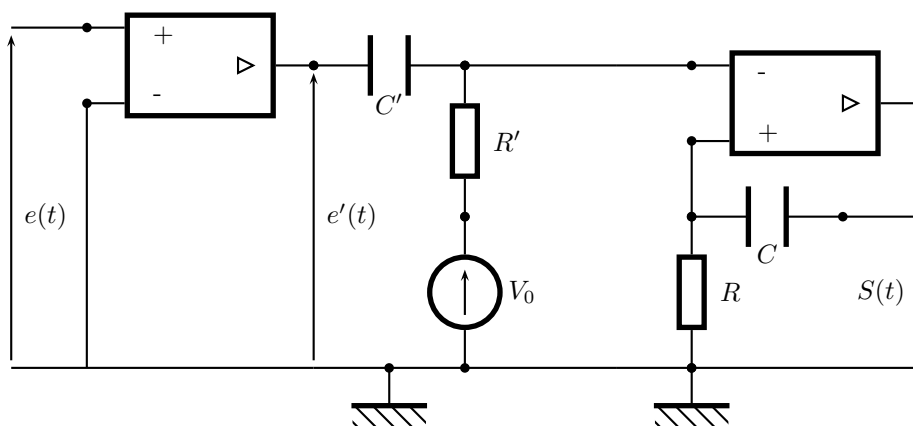


FIG. 7 - Fréquencemètre analogique

- 29. Quelle inégalité doivent vérifier les constantes R , C , R' et C' pour appliquer les résultats précédents lorsque le module de sortie est relié à l'entrée du fréquencemètre ?
- 30. Établir sur une période les cinq chronogrammes représentant les signaux $e(t)$, $e'(t)$, $V^-(t)$, $V^+(t)$ (tensions d'entrée du second amplificateur opérationnel) et $S(t)$ en respectant une même échelle de temps.
- 31. On note $\langle S \rangle$ la valeur moyenne de $S(t)$ sur une période. Utiliseriez-vous, en pratique, un voltmètre AC ou DC pour mesurer $\langle S \rangle$?
- 32. Exprimer simplement $f = 1/T$ en fonction de $\langle S \rangle$, V_{sat} et t_0 défini par :

$$t_0 = RC \ln \frac{2V_{sat}}{V_0}$$

Conclure en expliquant la mesure de la fréquence.

Problème n° 2 – Plasmons dans les métaux I

ENS MPI 2007

Ce problème porte sur les phénomènes liés aux oscillations collectives des électrons libres dans le volume et à la surface des métaux. Ces oscillations, nommées *plasmons*, sont à l'origine de nombreuses applications en physique, chimie et biologie.

On considérera que du point de vue de la propagation des ondes électromagnétiques l'air se comporte comme le vide et que le métal est non-magnétique. Dans tout le problème, un métal sera modélisé par un milieu isotrope homogène conducteur, de conductivité statique γ_0 , comprenant par unité de volume N électrons mobiles dans un réseau fixe d'atomes. Seul un électron par atome participe à la conduction dans le métal. Chacun de ces électrons est assimilé à une particule de masse m et de charge $-e$ libre de se mouvoir, les interactions subies se limitant à des chocs dont on ne cherchera pas à préciser la nature.

Données :

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Constante de BOLTZMANN : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Constante de PLANCK : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ et $\hbar = h/2\pi$

Nombre d'AVOGADRO : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Masse de l'électron : $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Masse molaire atomique de l'or : $M = 197 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masse volumique de l'or : $d = 19,3 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$

Conductivité statique de l'or : $\gamma_0 = 45,5 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Notation des nombres complexes : $i^2 = -1$

Relation d'analyse vectorielle : $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{U}) = \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{U} - \Delta \mathbf{U}$

A. Modèle microscopique du comportement des électrons

On suppose que les électrons du métal subissent de nombreux chocs affectant leur mouvement de telle manière que leur vitesse après un choc est totalement indépendante de la vitesse avant ce choc, en module et en direction. Pour un électron donné les chocs surviennent aux temps t_q avec $q = 1 \dots n$, la durée Δt entre deux chocs successifs obéissant à la loi de probabilité $P(\Delta t) = \frac{1}{\tau} \exp -\frac{\Delta t}{\tau}$. On considérera que la moyenne statistique d'une grandeur G sur un grand nombre de chocs, notée $\langle G \rangle$, coïncide avec sa moyenne temporelle \overline{G} définie par $\overline{G} = \int_0^\infty G(t)P(t)dt$.

1. Justifier que τ peut être considéré comme la durée moyenne entre deux collisions et calculer $\overline{\Delta t^2}$.
2. Quelle est la valeur moyenne du vecteur vitesse d'un électron en l'absence de champ électrique extérieur ?
3. Définir et calculer la valeur quadratique moyenne v_c de la vitesse d'agitation d'un électron en fonction de son énergie cinétique moyenne E . Calculer v_c pour $E = 5 \text{ eV}$ et commenter son ordre de grandeur.
4. Montre, en comparant la vitesse v_c à la vitesse thermique des électrons, que l'énergie des électrons dans le métal n'est pas d'origine thermique.
5. On place maintenant le matériau dans un champ électrique uniforme $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x$. On note \mathbf{v}_q la vitesse de l'électron immédiatement après le choc survenu au temps t_q . Déterminer la vitesse instantanée \mathbf{v} à tout instant $t \in]t_q, t_{q+1}[$ puis la grandeur $\mathbf{v}_{q+1} - \mathbf{v}_q$.
6. La moyenne $\langle \mathbf{v}_{q+1} - \mathbf{v}_q \rangle$ est appelée vitesse de dérive \mathbf{v}_d d'un électron sous l'effet du champ électrique. Exprimer \mathbf{v}_d en fonction de \mathbf{E}_0 , e , τ et m .
7. Montrer qu'on obtiendrait la même expression de \mathbf{v}_d qu'en 6 en ignorant le mouvement désordonné des électrons mais en supposant que chacun d'eux est soumis à une force supplémentaire de friction $\mathbf{F} = -\zeta \mathbf{v}$. Donner l'expression de \mathbf{v}_d et en déduire que $\zeta = m/\tau$.
8. On adopte par la suite cette description utilisant la force de friction \mathbf{F} . On rappelle qu'un seul électron par atome contribue à la conductivité de l'or. Exprimer la conductivité γ_0 en fonction de N , e , τ et m . Donner les valeurs numériques de N et τ pour l'or.
9. On applique une différence de potentiel de 1 V sur 1 mm de métal. Comparer les valeurs numériques de \mathbf{v}_c et \mathbf{v}_d .

10. Les observations précédentes montrent que l'énergie d'agitation E provient d'une origine non thermique. Une approche quantique est nécessaire pour expliquer le comportement énergétique d'un gaz d'électrons libres dans le métal. En physique quantique, l'énergie E associée au mouvement d'un électron dans une structure ordonnée d'ions fixes ne peut être quelconque : elle prend des valeurs discrètes E_p (avec p entier) auxquelles sont associées des fonctions d'onde de matière $\psi_p(x, y, z)$ qui traduisent le comportement spatial de l'électron dans l'état excité d'énergie E_p . L'électron est soumis à un potentiel périodique dans les trois dimensions x , y et z s'écrivant comme un produit $U(x, y, z) = U_x(x)U_y(y)U_z(z)$. On admet que la fonction $\psi(x, y, z)$ peut s'écrire

comme le produit de trois fonctions de variables indépendantes $\psi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$. À la fonction $f(x)$ (respectivement $g(y), h(z)$) on peut associer une énergie E_x (respectivement E_y, E_z). À une dimension x , les grandeurs $f(x)$ et E_x obéissent à l'équation de SCHRÖDINGER :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta f(x) + U(x)f(x) = E_x f(x)$$

Les grandeurs $(g(y), E_y)$ et $(h(z), E_z)$ obéissent à des équations similaires.

On considère un domaine élémentaire de la structure cristalline périodique du métal dans la direction x , défini par $x \in [0, L_x]$, avec $U_x = 0$ à l'intérieur de ce domaine, et $U_x(x) = \infty$ sur ses bords. De plus $f(x)$ s'annule sur ces bords. Montrer que la fonction $f(x)$ s'écrit sous la forme : $f(x) = f_0 \sin K_x x$ où f_0 et K_x sont des constantes.

11. Préciser l'unité de K_x et montrer que $E_x = \hbar^2 K_x^2 / (2m)$.

12. Montrer que les conditions aux limites imposent des valeurs particulières pour K_x notées K_{xp} (avec p entier) et exprimer ces valeurs. Justifier que l'on peut se restreindre aux valeurs $K_{xp} > 0$.

13. Les conditions aux limites de $U_y(y)$ et $U_z(z)$ sont identiques à celles de $U_x(x)$ sur les domaines respectifs $y \in [0, L_y]$ et $z \in [0, L_z]$. Montrer qu'à trois dimensions la fonction d'onde totale peut s'écrire :

$$\psi(x, y, z) = \psi_0 \sin K_x x \sin K_y y \sin K_z z$$

avec ψ_0 une constante positive ou négative, $E_y = \hbar^2 K_y^2 / (2m)$ et $E_z = \hbar^2 K_z^2 / (2m)$.

14. L'énergie E associée à la fonction d'onde $\psi(x, y, z)$ vaut $E = E_x + E_y + E_z$. En déduire les valeurs d'énergie E possibles pour l'électron.

15. On souhaite calculer l'énergie totale du gaz d'électrons à partir de leurs énergies quantifiées E_p . On se place dans l'espace des \mathbf{K} , vecteurs d'ondes de matière de composantes K_x, K_y, K_z . Cet espace est défini graphiquement par le repère (K_x, K_y, K_z) . Comment sont disposées dans cet espace les valeurs possibles de \mathbf{K} imposées par les conditions aux limites de ce problème? Donner les valeurs $\Delta K_x, \Delta K_y, \Delta K_z$, entre deux points consécutifs dans chacune des directions respectives K_x, K_y, K_z . Justifier que le produit $\Delta K_x \cdot \Delta K_y \cdot \Delta K_z$ représente dans cet espace le volume occupé par un état électronique.

16. Représenter dans l'espace des \mathbf{K} la zone correspondant à des états d'énergie inférieure à une énergie E donnée. Soit $n(E)$ le nombre d'états d'énergie inférieure à E . On admet que la prise en compte du spin de l'électrons revient à multiplier par 2 le nombre d'états calculés. Donner l'expression de $dn(E)$, nombre d'états correspondant à un vecteur d'onde de norme comprise entre K et $K + dK$, où K est la norme du vecteur d'onde associé à l'énergie E . On supposera $n(E)$ très grand, si bien que $dK_{x,y,z} \gg \Delta K_{x,y,z}$.

17. En intégrant $dn(E)$ entre $E = 0$ et E , montrer que :

$$n(E) = \frac{L_x L_y L_z}{3\pi^2 \hbar^3} (2mE)^{3/2}$$

18. L'énergie du gaz d'électrons dans le métal E_F (appelée énergie de FERMI) est calculée par analogie avec la chimie : de la même façon que les propriétés des atomes sont définies par les électrons de plus haute énergie, l'énergie E_F correspond à celle du dernier niveau rempli. En déduire que :

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 N)^{2/3}$$

Donner la valeur numérique de E_F dans l'or et justifier la valeur de l'énergie cinétique d'agitation E donnée à la question 3.